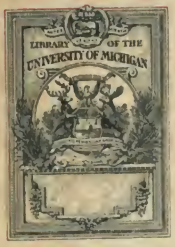
DIE LEIBRENTEN-, LEBENSVERSICHERUNGS- UND RENTEN-ANSTALTEN. ...

Albert Wild

Digitized by Google



FROM THE LIBRARY OF
Professor Karl Heinrich Rau
OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG
PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY
Mr. Philo Parsons
OF DETROIT
1871

HG
879
.W67

8 Red B 1 Insurance 3: 8 P.L. 513 3.3.

Die

Leibrenten-, Lebensversicherungs- und Renten-Anstalten.

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

Eine theoretische und praktische Anleitung

zu allen hierin vorkommenden Berechnungen

nebst Vorschlägen

zur

Neugestaltung der Renten-Gesellschaften.

Von

Albert Wild,

DOCTOR DER STAATSWIRTHSCHAFT.

MÜNCHEN, 1862.

E. A. Fleischmann's Buchhandlung.

August Rohsold.

Die

Leibrenten-, Lebensversicherungs- und Renten-Anstalten.

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

Eine theoretische und praktische Anleitung

zu allen hierin vorkommenden Berechnungen

nebst Vorschlägen

zur

Neugestaltung der Renten-Gesellschaften.

Von

Albert Wild,
DOCTOR DER STAATSWIRTHSCHAFT.

MÜNCHEN, 1862.
E. A. Fleischmann's Buchhandlung.
August Rohsold.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorrede.

Die Renten- und Lebensversicherungs-Anstalten sind ein so wichtiger Gegenstand und haben gegenwärtig eine so hohe Bedeutung erlangt, dass sie mehr als je unsre volle Aufmerksamkeit verdienen. Die stets zunehmende Ausdehnung und Vergrösserung derselben versprechen einen sicheren Bestand und einen weit höheren Einfluss auf den Zustand der socialen Verhältnisse, als man für jetzt wohl kaum ahnen mag. Ihre Lebensfähigkeit ist ausser Zweifel.

Wir leben vorzugsweise in einer Zeit der Unternehmungen, der Association zur Sicherung gegen die Gefahren, welche die Culturentwicklung begleiten. Wir können uns aber nicht verhehlen, dass unser Gegenstand, obgleich er den Character einer Privatunterneh-

Digitized by Google

mung an sich trägt, durchaus allgemeines Interesse, allgemeine Bedeutung hat.

Wenden wir uns an die vorhandene Literatur, so können wir gerade über keinen Mangel klagen; wir müssen im Gegentheil auf sehr schätzenswerthe Werke aufmerksam machen, wie z. B. auf die Werke von Tetens, Baily, Jones u. a. m. So gerne wir aber ihre grossen Verdienste anerkennen und das grosse Aufsehen bewundern, welches sie mit Recht seiner Zeit hervorriefen, und auch heute noch dieselbe Bewunderung für sie beanspruchen, so mussten wir doch noch Vieles vermissen, das einer neuen Bearbeitung würdig war. Diese neue Bearbeitung ist keine Nachahmung, sondern weicht sowohl in Ansehung des behandelten Stoffes, als auch hinsichtlich der befolgten Methode, den Gegenstand klar und bündig zu behandeln, von dem Vorhandenem ab.

Zur näheren Würdigung dessen führen wir nur folgende Puncte an:

1) Zum richtigen Verständniss dieses Gegenstandes ist durchaus die Kenntniss der Erfahrungen über menschliche Sterblichkeit und die daraus resultirenden Bestimmungen verschiedener Wahrscheinlichkeits-Formeln nothwendig. Diese wurden selbstständig behandelt und in den Problemen der Statistik niedergelegt, um eine durchweg principiell einheitliche

Digitized by Google

und systematische Ableitung der in Formeln gefassten Endresultate erzielen zu können.

2) Durch diese Ausscheidung wurde es möglich, alle Formeln nicht bloss aus einem einzigen Principe, aus dem der mathematischen Hoffnung, abzuleiten, sondern sie zugleich auch möglichst klar und für Jedermann verständlich zu machen und in die Entwickelung selbst die grösste Einfachheit zu bringen.

3) War es Absicht, die Barrikaden einer Unzahl complicirter, dem Gedächtniss schwer zugänglicher Formeln zu durchbrechen, die Schwierigkeit unvermeidlicher symbolischer Bezeichnung durch äusserste Sparsamkeit wenigstens theilweise zu umgehen. Um sowohl dem Gedächtnisse als auch dem Verständnisse zu Hilfe zu kommen, wurde fast jeder behandelte Fall unmittelbar durch ein passendes practisches Beispiel erläutert.

4) Im ersten und zweiten Abschnitte mussten mehrere ganz neue Fragen, welche selbst in grösseren Werken unberücksichtigt blieben, in Betracht gezogen werden. Der dritte Abschnitt über Renten- und Versorgungs-Anstalten wurde völlig neu ohne jede Vorarbeit andrer Autoren bearbeitet. Dadurch wird eine Lücke ausgefüllt und die Möglichkeit geboten, diese Anstalten

Digitized by Google

nach streng mathematischen Grundsätzen zu reformiren, wenn man anders von den darin niedergelegten Resultaten Gebrauch machen will.

Diese hier erwähnten Puncte bildeten hauptsächlich das Motiv zu vorliegendem Werke. Wer sich die Mühe nehmen will, ältere Autoren damit zu vergleichen, wird sich wohl überzeugen, dass diese Puncte von solchem Gewichte und so belangreich sind, dass eine glückliche Erledigung eine lohnende Arbeit ist. Der einsichtsvolle Leser wird selbst urtheilen, und dem redlichen Streben des Verfassers Gerechtigkeit widerfahren lassen.

München, Ende April 1862.

Dr. Albert Wild.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Geschichtliches 3

I. Abschnitt.

Die Leibrenten-Anstalten.

Einleitung 4

1. Abtheilung.

Leibrenten für eine Person.

I. Einfache Leibrenten 4

Herstellung von Leibrententafeln für jedes Alter 6

Tabellen zur Bestimmung des gegenwärtigen Werthes der einfachen Leibrente für Männer und Frauen 8

Werth der Einlage (mise) aus der Grösse der Jahresrente . . 10

Werth der Jahresrente aus der Grösse der Einlage 11

II. Aufgeschobene Leibrenten 12

Werth der Einlage aus der Grösse der Jahresrente 12

Werth der Jahresrente aus der Grösse der Einlage 13

III. Temporäre oder aufhörende Leibrenten 14

Einlage aus der Jahresrente 15

Jahresrente aus der Einlage 16

Digitized by Google

Seite

IV. Aufgeschobene Leibrenten durch jährliche Einlagen oder Prämien 17
Die jährliche Prämie aus der Jahresrente 18
Die Jahresrente aus der jährlichen Prämie 19

2. Abtheilung.

Leibrenten für zwei und mehrere Personen.

I. Verbindungsrenten 20
II. Die einfachen Eherenten 20
Berechnung von Eherenten-Tafeln 22
Tabelle zur Bestimmung des gegenwärtigen Werthes der Eherenten 23
Die Einlage aus der Jahresrente einer Eherente 26
Die Jahresrente aus der Einlage einer Eherente 27
Aufgeschobene Eherenten 27
Temporäre oder aufhörende Eherenten 29
III. Verbindungsrenten für zwei beliebige Personen 30
Leibrenten auf die längstlebende von zwei Personen 31
Die Einlage aus der Jahresrente 32
Die Jahresrente aus der Einlage 33
Aufgeschobene Leibrenten auf die längst lebende von zwei Personen ohne und mit Bedingungen 33
Einlage aus der Jahresrente 35
Jahresrente aus der Einlage 36
Die Einzahlung durch Prämien 37
IV. Verbindungsrenten für drei Personen 38
Leibrenten auf die längstlebende von drei Personen 39

3. Abtheilung.

Ueberlebungsrenten, Wittwen- und Waisen-Pensionen.

Erklärung 41
Die Wittwenpensionen 41
Einlage aus der Jahresrente 42
Jahresrente aus der Einlage 42
Aufhörende Wittwenpensionen 43
Waisenpensionen. Pension für eine absolute Waise 44
Temporäre oder aufhörende Pension für absolute Waisen . . . 45

Digitized by Google

Seite

Pension für vaterlose Kinder 46
Gegenwärtiger Werth der Leibrente für eine Person nach den Sterblichkeitstafeln von Deparcieux 47
Gegenwärtiger Werth der Verbindungsrenten für zwei Leben . 48
Einlage aus der Jahrespension für ein vaterloses Kind 55
Die Jahrespension aus der Einlage 56
Die Einzahlung durch Jahresbeiträge oder Prämien 56
Theilweise Einzahlung durch Prämien 58
Die lebenslängliche Einzahlung in Wittwencassen 60

4. Abtheilung.

Besondere Arten von Leibrenten.

Zunehmende Leibrenten 61
Abnehmende Leibrenten 63
Leibrenten, welche periodenweise zu- oder abnehmen 64
Die Rentenerhöhung aus der Einlage und der anfänglichen Jahresrente 66
Leibrenten mit Rückvergütung 67
Aufgeschobene Leibrenten mit Rückvergütung 71
Die Gegenversicherung 72
Die Capitalversicherung 72

II. Abschnitt.

Die Lebensversicherungs-Anstalten.

Einleitung 73

1. Abtheilung.

Versicherung Eines Lebens.

I. Versicherung auf Lebenszeit 75
Einzahlung durch Prämien 77
Bestimmung der Prämie aus dem Versicherungskapital . . . 78
Das Versicherungskapital aus der Prämie 79
Tarif der jährlichen Prämien bei einer Versicherung auf Lebenszeit für 100 fl. Versicherungskapital nach der Lebensversicherungs-Anstalt in München 80

Digitized by Google

Seite

Jährliche Prämie und gegenwärtiger Werth der einfachen Lebensversicherung von 100 fl. Kapital nach den Sterblichkeitstafeln von Deparcieux 81
Anwendung der Lebensversicherungstafel 84
II. Temporäre Versicherung eines Lebens 85
III. Aufgeschobene Versicherung eines Lebens 88
Einzahlung durch Prämien 89

2. Abtheilung.

Versicherung mehrerer Leben.

I. Versicherung auf Lebenszeit 89
Die jährliche Prämie aus der Versicherungssumme und umgekehrt 92
II. Versicherung dreier Leben auf Lebenszeit 95
Versicherung auf das Erststerbende 95
Versicherung auf das Letztsterbende 96
Einzahlung durch Prämien 96
III. Temporäre Versicherung auf das Leben des Erststerbenden . 97
Bestimmung der jährlichen Prämie 98
Temporäre Versicherung auf das Leben des Letztsterbenden . 99

3. Abtheilung.

Ueberlebungsversicherungen.

Ueberlebungsversicherungen für zwei Personen auf Lebenszeit . . 100
Bestimmung der jährlichen Prämien 103
Temporäre Ueberlebungsversicherung 104
Bestimmung der jährlichen Prämie 105
Ueberlebungsversicherungen für drei Personen 105

4. Abtheilung.

Besondere Fälle, welche bei Lebensversicherungen eintreten können.

Rückkauf der Lebenspolice 105
Rückkauf der Police durch eine Leibrente 108
Zu- und abnehmende Prämien 109
Prämien-Nachlass nach festgesetzten Procenten 110

Digitized by Google

Seite
Prämien-Nachlass durch Gewinn-Antheil 113
Prämienvergütung durch Erhöhung der Versicherungssumme in festgesetzten Procenten 116
Erhöhung der Versicherungssumme durch Gewinn-Antheil . . . 118
Berechnung des Reservefonds 120

5. Abtheilung.

Ueber den Stand der deutschen Lebensversicherungs-Anstalten.

Grundlagen des deutschen Versicherungswesen 122
Geschäfts-Ergebnisse und Zustand d. deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften 126
Prämien der deutschen Lebens-Versicherungs-Gesellschaften . . 129
Die Erfahrungen der Lebensversicherungs-Bank in Gotha . . . 131

III. Abschnitt.

Die Renten-Anstalten.

Einleitung 134

1. Abtheilung.

Die Sparkassen-Tontinen.

Erklärung des Gegenstandes 136
Einlage und Vertheilung des Gesellschaftscapitals 137
Bestimmung der Einlage bei gleichmässiger Capitalvertheilung . . 138
Berechnung späterer Einlagen 140
Capitalvertheilung bei gleichmässiger Einlage 141
Erwartungswerth einer einfachen Einlage 144
Die Sparcassen-Tontine als Ausstattungs- und Versorgungsanstalt 147
Jährliche Einzahlungen aus der Grösse der Aussteuer 149
Die Ersparnissbank in Stuttgart 152

2. Abtheilung.

Die Renten-Gesellschaften.

Einleitung 153
Die Classen-Eintheilung 155

Digitized by Google

Seite

Der Reserve-Fond und das Renten-Capital 156
Die Capital-Auflösung 157
Die gegenseitige Beerbung 159
Die Anfangs- und Maximal-Rente 159
Allgemeine Bemerkungen über Zweckmässigkeit der Renten-Gesellschaften 162
Maasstab der Renten-Vertheilung unter die Mitglieder einer und derselben Serie bei gleicher Einlage 163
Die Ausführung der Vertheilung 173
Bestimmung der Einlage bei gleichmässiger Vertheilung 179
Bestimmung der Jahresrente 189

Berichtigungen.

Man lese: Seite 60 unten $k = b + b \times r_m$ anstatt $k \times b + b \times r_m$
„ 74 „ $100 \times \varrho^x$ anstatt $100 + \varrho^x$

Digitized by Google

Literatur.

BAILY, Theorie der Lebensrenten, Lebensversicherungen, Wittwenkassen etc. Uebersetzt von Schnuse. Weimar 1839.

BLESSON, L., Die Rentenversicherungs-Anstalten und deren Bedeutung. Berlin 1840.

BREMIKER, das Risico bei Lebensversicherungen. Wien 1861.

BRUNE, Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Lemgo 1820.

DEPARCIEUX, *Essai sur la probabilité de la durée de la vie humaine.* Paris 1746. Supplement. 1760.

DEUTSCHE VIERTELJAHRES-SCHRIFT. 1854. Art. v. Hopf.

GEBHARD, Ueber Wittwen- und Waisen-Pensions-Anstalten etc. München 1844.

HATTENDORF, K., Leibrenten und Lebensversicherungen. 1859.

HUEBNER, DR. OTTO, Jahrbuch für Volkswirthschaft und Statistik. Leipzig.

JAHN, Berechnungen der Prämien und des Reservefonds bei Lebensversicherungs-Anstalten. Zittau 1852.

KARSTEN, Theorie von Wittwenkassen. Halle 1784.

KERSEBOOM, *Verhandeling tot een Proeve om te weeten de probable menigte des Volks in de Provincie van Holland en Westfriesland.* s' Gravenhage 1738.

KRITTER, Oekonomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen von Wittwenkassen. Göttingen 1768.

LITTROW, Berechnung der Lebensrenten und Wittwen-Pensionen. Wien 1829.

— Ueber Lebensversicherungen u. a. Versorgungs-Anstalten. Wien 1832.

MASIUS, Lehre der Versicherung und statistische Nachweisung aller Versicherungs-Anstalten in Deutschland etc. Leipzig 1846.

MEYER, Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Kopenhagen 1823.

Digitized by Google

MOSER, L., Die Gesetze der Lebensdauer nebst Anhang zur Berechnung von Leibrenten. Berlin 1839.

OELTERMANN, Darstellung der Hauptgrundsätze und Berechnung bei Wittwen-, Waisen-, Leibrenten-Kassen etc. Oldenburg 1806.

PRICE, R., *Observations on reversionary payments etc.* London 1771. Ed. 7. 1812.

SALOMON, Ueber Lebensversicherungs-Anstalten etc. Wien 1840.

SIMPSON, TH., *The doctrine of annuities and reverions.* London 1752.

SCHMALZ, Ueber Wittwenkassen und Lebensversicherungen. Dresden 1841.

SPITZER, S., Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Wien 1861.

TETENS, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Leipzig 1785.

VIERHEILIG, M., Gründliche Anleitung zur richtigen Berechnung der Wittwen-Kassen und Lebensversicherungs-Anstalten. Landshut 1845.

WIEGAND, Die mathematische Grundlage der Lebensversicherungs-Institute. Halle 1854.

WILD, DR. ALBERT, Politische Rechnungs-Wissenschaft. Anleitung zu allen im Staatsleben vorkommenden Berechnungen durch Beispiele und Zeichnungen erläutert etc. München 1862. 2 Bde.

— Die Grundsätze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung und ihre Anwendungen. München 1862.

— Probleme der Statistik im Zusammenhange mit der Politischen Rechnungs-Wissenschaft mit besonderer Berücksichtigung der statistischen Tabellen über Mortalitätsverhältnisse. München 1862.

ZILLMER, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. Berlin 1861.

Digitized by Google

Die Leibrenten-, Lebensversicherungs- und Renten-Anstalten.

Digitized by Google

Digitized by Google

§. 1.

Geschichtliches.

Die Idee, durch Vereine den plötzlichen Verlust und dessen Rückwirkungen auf den Einzelnen weniger empfindlich zu machen oder mit andern Worten durch eine gemeinschaftliche Kasse das Unglück des Einzelnen zu mildern, ist schon sehr alt, und sowohl bei den Griechen als Römern[1]) practisch in Uebung gewesen. Auch im Mittelalter haben sich Vereine zur gegenseitigen Unterstützung gebildet. Die Anstalten dieser Vereine hatten aber noch nicht den Character unsrer heutigen hieher gehörigen Anstalten. Jeder zahlte gleich viel Beitrag ohne Unterschied des Alters. Einzahlungen nach Verhältniss des Alters, sowie überhaupt Lebensversicherungsgesellschaften entstanden zuerst in England.

Thomas Allen, Bischof von Oxford, gründete im Jahre 1706 die *amicable society*; *Mac-Laurin*, veröffentlichte im Jahre 1748 in Schottland einen berechneten Entwurf zu einer Wittwen- und Waisenkasse; endlich gaben Simpson und Price vollständige Theorien der Lebensversicherungen heraus.

Seitdem haben sich diese und ähnliche Anstalten, und man darf von der Mehrheit sagen, zum Segen der Menschheit über ganz Europa verbreitet, und scheinen noch fortwährend grössere Dimensionen annehmen zu wollen. Die Literatur schritt nicht minder vorwärts; verschiedene Schriftsteller,

[1]) Bei den Römern kamen auch Legate vor, welche nach dem Willen des Erblassers in lebenslänglichen Renten bestanden. Um aber in einem solchen Falle nach der *Quarta Falcidia* dem Erben den vierten Theil der Erbschaft zu sichern, waren von **Ulpian** Normen mit Gesetzeskraft aufgestellt, nach welchen der Werth einer solchen Rente bestimmt werden musste.

Digitized by Google

Florencourt, Tetens, Baily, Jones etc., arbeiteten rüstig, die Theorie den socialen Zuständen entsprechend zu vervollständigen. In Deutschland kann der grosse Euler als der erste betrachtet werden, welcher 1760 eine Berechnungsart der Wittwen-Renten vortrug.

I. Abschnitt.

Die Leibrenten-Anstalten.

§. 2.

Einleitung.

Entäussert sich Jemand seines Kapitals gegen Zinsengenuss in der Art, dass er niemals in den Besitz desselben wieder gelangen kann oder mit andern Worten, dass er gegen eine terminweise baare Vergütung für immer auf sein Kapital verzichtet, so heisst diese baare Vergütung im Allgemeinen Rente. Dabei lassen sich dreierlei Renten unterscheiden:

1) Zeitrenten oder Annuitäten, wenn der Genuss der Rente auf eine bestimmte Anzahl Jahre festgesetzt ist;
2) Leibrenten, d. i. Annuitäten auf Lebenszeit;
3) immerwährende Renten, d. h. solche, welche einer gewöhnlichen Kapitalverzinsung gleichkommen.

Die letzteren sind in Frankreich zu Hause und haben für uns kein besonderes Interesse; die Zeitrenten werden wir bei den Credit-Anstalten, die Leibrenten in den folgenden Paragraphen behandeln.

1. Abtheilung.

Leibrenten für Eine Person.

§. 3.

I.

Einfache Leibrenten.

Eine $m$jährige Person A bezieht jährlich die Rente von 1 fl. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Rente, oder

Digitized by Google

mit welcher Summe (Einlage) kann die jährliche Rente von 1 fl. erworben werden?

Bezeichnen wir mit

r_m den Werth der Rente einer $m$jährigen Person;

z Zins von 1 fl.;

$\frac{1}{1+z} = \varrho$ den auf 1 Jahr discontirten Werth von 1 fl.;

so ist der Werth Eines nach n Jahren zahlbaren Gulden ausgedrückt durch

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^n = \varrho^n .$$

Wird demnach A bis dahin leben, d. h. $(m+n)$ Jahre erreichen, so hat der in jener Zeit zahlbare Gulden den gegenwärtigen Werth

$$\varrho^n .$$

Weil aber A auch sterben kann, so ist dieser Werth in dem Maasse geringer, als die Wahrscheinlichkeit bis dahin zu leben gering ist. Die Wahrscheinlichkeit das $(m+n)^{\text{te}}$ Jahr zu erreichen ist

$$\frac{a_{m+n}}{a_m};$$

das Product

$$\varrho^n \cdot \frac{a_{m+n}}{a_m}$$

ist demnach der gegenwärtige Werth eines nach n Jahren zahlbaren Guldens für die Person A, welcher Werth sich mit jedem Jahre ändert. Setzen wir der Reihe nach 1, 2, 3.... statt n, so erhalten wir den gegenwärtigen Werth jeder einzelnen Jahresrente, nämlich

$$\varrho \frac{a_{m+1}}{a_m}, \quad \varrho^2 \frac{a_{m+2}}{a_m}, \quad \varrho^3 \frac{a_{m+3}}{a_m}, \quad \varrho^4 \frac{a_{m+4}}{a_m} \ldots .$$

Die Summe aller dieser Glieder

$$S\left[\frac{a_{m+n}}{a_m}\varrho^n\right] = \frac{1}{a_m}\left[\varrho\, a_{m+1} + \varrho^2 a_{m+2} + \varrho^3 a_{m+3} + \ldots .\right]$$

Digitized by Google

ist der gegenwärtige Werth der ganzen Leibrente für eine $m$jährige Person, welchen wir auch durch die Gleichung

$$r_m = S\left[\frac{a_{m+n}}{a_m}\varrho^n\right]$$

darstellen können.

Beispiel. Welches ist der gegenwärtige Werth einer jährlichen Rente von 1 fl. für einen 90jährigen Mann bei einer 4procentigen Zinsesrechnung?

In diesem Falle haben wir mit Hilfe der Sterblichkeitstafel von Brune

$$a_{90} = 46; \quad \varrho = \frac{100}{104} = 0{,}9615$$

$$\begin{aligned}
\varrho\ a_{91} &= 24 \times 0{,}9615 = 23{,}0760\\
\varrho^2 a_{92} &= 11 \times 0{,}9245 = 10{,}1695\\
\varrho^3 a_{93} &= 4 \times 0{,}8889 = 3{,}5556\\
\varrho^4 a_{94} &= 1 \times 0{,}8546 = 0{,}8546\\
&\qquad\qquad\qquad\quad 37{,}6567
\end{aligned}$$

mithin

$$r_{90} = \frac{37{,}6557}{46} = 0{,}8186 \text{ fl.}$$

Nach diesem Beispiele lässt sich der gegenwärtige Werth einer Leibrente von 1 fl. für jedes Alter berechnen und zum fortwährenden Gebrauche in Tabellen bringen. Es lässt sich indess mit Vortheil noch ein anderer Weg einschlagen.

§. 4.

Herstellung von Leibrententafeln für jedes Alter.

Nach dem vorigen Paragraph ist der gegenwärtige Werth einer Leibrente von 1 fl. für eine $m$jährige Person ausgedrückt durch

$$r_m = \frac{1}{a_m}(\varrho\, a_{m+1} + \varrho^2 a_{m+2} + \varrho^3 a_{m+3} + \ldots).$$

Nehmen wir die Person um 1 Jahr älter, d. h. schreiben wir $m+1$ anstatt m, so ist

$$r_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1}}(\varrho\, a_{m+2} + \varrho^2 a_{m+3} + \varrho^3 a_{m+4} + \ldots).$$

Digitized by Google

Wird letztere Gleichung noch mit ϱ multiplicirt und in beiden Gleichungen der Nenner weggeschafft, so nehmen sie folgende Form an

$$r_m\ a_m = \varrho\, a_{m+1} + \varrho^2 a_{m+2} + \varrho^3 a_{m+3} + \ldots.$$
$$\varrho\, r_{m+1}\ a_{m+1} = \qquad \varrho^2 a_{m+2} + \varrho^3 a_{m+3} + \ldots.$$

und geben durch Subtraction die Relation

$$r_m\ a_m - \varrho\, r_{m+1}\, a_{m+1} = \varrho\, a_{m+1}.$$

Daraus folgt sogleich

$$r_m = \frac{\varrho\, a_{m+1}}{a_m}\ (r_{m+1} + 1)\ ^1),$$

welche Formel äusserst bequem ist, eine Tabelle zu berechnen.

Beispiel. Ist der gegenwärtige Werth der Leibrente eines 51jährigen Mannes

$$r_{51} = 11{,}4671,$$

so ist jener eines 50jährigen bei einer 4procentigen Rechnung

$$r_{50} = \frac{0{,}9615 \times 6714}{6845}\ (11{,}4671 + 1)$$
$$= 0{,}94303 \times 12{,}4671$$
$$= 11{,}7584 \text{ fl.}$$

---

1) Diese Gleichung lässt sich direct durch folgende einfache Betrachtung ableiten. Ist r_m der gegenwärtige Werth, so besteht er aus zwei andern. Der eine ist 1 fl. bis zum Antritt des $(m+1)^{\text{ten}}$ Jahres; der andere r_{m+1} der Werth der Leibrente ein Jahr später gerechnet. Dass aber A die Summe $(1 + r_{m+1})$ erhält, hat er die Wahrscheinlichkeit $\frac{a_{m+1}}{a_m}$, welche ausdrückt, dass er das $(m+1)^{\text{te}}$ Jahr erreichen wird. Das Product aus beiden

$$\frac{a_{m+1}}{a_m}\ (1 + r_{m+1})$$

ist aber erst nach 1 Jahr zahlbar und folglich noch mit ϱ zu multipliciren, so dass der gegenwärtige Werth der Leibrente durch

$$r_m = \frac{\varrho\, a_{m+1}}{a_m}\ (1 + r_{m+1})$$

ausgedrückt ist.

Digitized by Google

Macht man mit dem höchsten Alter den Anfang, so findet man auf die angezeigte Weise den entsprechenden Werth für jedes Alter. Um den Nutzen solcher Tabellen zu zeigen, theilen wir eine nach Brune's Sterblichkeitstafel berechnete mit.

§. 5.

Tabelle zur Werthbestimmung der einfachen Leibrente für Männer und Frauen.

Gegenwärtiger Werth der einfachen Leibrente von 1 fl. nach Brune's Sterblichkeitstafel für Männer und Frauen.

Alter	Für Männer			Für Frauen		
	3 %	3½ %	4 %	3 %	3½ %	4 %
16				20,8298	19,0871	17,5791
17				20,8080	19,0804	17,5833
18				20,7775	19,0664	17,5813
19				20,7354	19,0422	17,5703
20				20,6780	19,0045	17,5475
21	21,3823	19,6899	18,2090	20,6020	18,9501	17,5095
22	21,1626	19,5075	18,0567	20,5081	18,8795	17,4571
23	20,9357	19,3183	17,8981	20,3973	18,7938	17,3909
24	20,7038	19,1243	17,7349	20,2710	18,6940	17,3119
25	20,4667	18,9252	17,5669	20,1306	18,5813	17,2212
26	20,2241	18,7209	17,3939	19,9776	18,4571	17,1200
27	19,9736	18,5089	17,2136	19,8162	18,3252	17,0118
28	19,7147	18,2888	17,0256	19,6484	18,1875	16,8984
29	19,4496	18,0626	16,8317	19,4763	18,0458	16,7814
30	19,1778	17,8299	16,6315	19,2974	17,8979	16,6586
31	18,8993	17,5905	16,4247	19,1112	17,7432	16,5297
32	18,6159	17,3461	16,2130	18,9200	17,5839	16,3965
33	18,3297	17,0986	15,9981	18,7210	17,4173	16,2566
34	18,0427	16,8500	15,7818	18,5164	17,2455	16,1119
35	17,7528	16,5981	15,5621	18,3035	17,0659	15,9598
36	17,4574	16,3407	15,3369	18,0819	16,8780	15,8001
37	17,1585	16,0795	15,1077	17,8512	16,6815	15,6322
38	16,8582	15,8164	14,8764	17,6134	16,4782	15,4580
39	16,5562	15,5512	146428	17,3658	16,2655	15,2748
40	16,2526	15,2840	14,4068	17,1055	16,0406	15,0800

Digitized by Google

Alter	Für Männer			Für Frauen		
	3 %	3½ %	4 %	3 %	3½ %	4 %
41	15,9450	15,0125	14,1664	16,8319	15,8029	14,8730
42	15,6310	14,7344	13,9194	16,5443	15,5518	14,6530
43	15,3104	14,4495	13,6654	16,2446	15,2887	14,4215
44	14,9850	14,1594	13,4060	15,9322	15,0132	14,1779
45	14,6544	13,8637	13,1409	15,6089	14,7269	13,9236
46	14,3206	13,5643	12,8716	15,2767	14,4315	13,6603
47	13,9832	13,2608	12,5980	14,9375	14,1288	13,3894
48	13,6442	12,9551	12,3216	14,5884	13,8161	13,1086
49	13,3035	12,6470	12,0423	14,2315	13,4952	12,8194
50	12,9588	12,3344	11,7582	13,8662	13,1654	12,5211
51	12,6080	12,0152	11,4671	13,4943	12,8286	12,2153
52	12,2527	11,6909	11,1705	13,1153	12,4841	11,9015
53	11,8927	11,3612	10,8681	12,7311	12,1338	11,5813
54	11,5296	11,0278	10,5613	12,3435	11,7791	11,2562
55	11,1634	10,6905	10,2500	11,9563	11,4239	10,9298
56	10,7957	10,3508	9,9358	11,5738	11,0722	10,6058
57	10,4286	10,0108	9,6203	11,1939	10,7221	10,2826
58	10,0601	9,6686	9,3020	10,8168	10,3737	9,9601
59	9,6924	9,3262	8,9826	10,4405	10,0251	9,6367
60	9,3276	8,9856	8,6643	10,0609	9,6724	9,3085
61	8,9683	8,6494	8,3493	9,6779	9,3153	8,9752
62	8,6174	8,3205	8,0405	9,2912	8,9538	8,6366
63	8,2745	7,9984	7,7376	8,9027	8,5894	8,2945
64	7,9373	7,6811	7,4385	8,5166	8,2263	7,9525
65	7,6036	7,3662	7,1412	8,1374	7,8688	7,6150
66	7,2707	7,0514	6,8432	7,7685	7,5202	7,2852
67	6,9377	6,7356	6,5435	7,4137	7,1843	6,9669
68	6,6078	6,4221	6,2452	7,0740	6,8621	6,6611
69	6,2852	6,1148	5,9523	6,7488	6,5533	6,3674
70	5,9708	5,8147	5,6656	6,4380	6,2576	6,0858
71	5,6683	5,5255	5,3889	6,1396	5,9732	5,8145
72	5,3782	5,2478	5,1227	5,8514	5,6980	5,5515
73	5,1066	4,9874	4,8729	5,5754	5,4341	5,2991
74	4,8568	4,7479	4,6431	5,3151	5,1849	5,0603
75	4,6282	4,5286	4,4327	5,0693	4,9494	4,8345
76	4,4190	4,3282	4,2406	4,8366	4,7262	4,6203
77	4,2076	4,1254	4,0459	4,6109	4,5095	4,4120
78	3,9759	3,9023	3,8311	4,3821	4,2892	4,1999
79	3,7115	3,6497	3,5839	4,1448	4,0602	3,9787
80	3,4199	3,3639	3,3094	3,8990	3,8223	3,7484

Digitized by Google

Alter	Für Männer			Für Frauen		
	3 %	3½ %	4 %	3 %	3½ %	4 %
81	3,1132	3,0654	3,0190	3,6545	3,5851	3,5182
82	2,8023	2,7621	2,7230	3,4336	3,3706	3,3096
83	2,5012	2,4678	2,4352	3,2529	3,1951	3,1392
84	2,2232	2,1956	2,1686	3,1138	3,0604	3,0086
85	1,9703	1,9476	1,9254	3,0003	2,9508	2,9026
86	1,7215	1,7032	1,6853	2,8925	2,8468	2,8023
87	1,4748	1,4604	1,4463	2,7731	2,7314	2,6909
88	1,2366	1,2256	1,2147	2,6204	2,5834	2,5473
89	1,0221	1,0137	1,0055	2,4188	2,3868	2,3556
90	0,8308	0,8247	0,8186	2,1804	2,1536	2,1275
91	0,6402	0,6360	0,6318	1,9321	1,9101	1,8886
92	0,4387	0,4362	0,4337	1,6866	1,6689	1,6516
93	0,2427	0,2415	0,2404	1,4381	1,4243	1,4108
94				1,2219	1,2112	1,2008
95				0,9927	0,9899	0,9773
96				0,7528	0,7476	0,7424
97				0,5507	0,5474	0,5442
98				0,3236	0,3221	0,3205

§. 6.

Werth der Einlage (mise) aus der Grösse der Jahresrente.

Eine $m$jährige Person A will lebenslänglich eine Jahresrente $= s$ geniessen; welche Einlage hat A zu machen, oder welches ist der gegenwärtige Werth der ganzen Leibrente?

Um jährlich 1 fl. zu geniessen, ist die Einlage

$$r_m$$

nöthig; sollen aber jährlich s fl. erhoben werden, so ist auch die Einlage für 1 fl. Rente $s$mal zu leisten. Das Product

$$s \times r_m$$

ist daher der Betrag der Einlage, um eine Jahresrente $= s$ zu geniessen.

Da nun r_m für alle Fälle schon berechnet ist, so lässt sich für jedes s die Einlage durch eine einfache Multiplication ermitteln.

Digitized by Google

Beispiele. **1)** Welche Einlage hat ein 40jähriger Mann zu leisten, um eine Jahresrente von 800 fl. zu beziehen?

Nach der Tabelle ist bei 4 % Zinsen

$$r_{40} = 14{,}4068$$

folglich $$s \times r_{40} = 14{,}4068 \times 800$$
$$= 11525{,}44 \text{ fl.}$$

2) Welches ist der gegenwärtige Werth der Leibrente einer 36jährigen Frau, welche jährlich 500 fl. geniesst?

Nehmen wir wieder eine 4procentige Rechnung, so ist nach der Rententafel

$$r_{36} = 15{,}8001$$

daher $$s \times r_{36} = 500 \times 15{,}8001$$
$$= 7900{,}05 \text{ fl.}$$

§. 7.

Werth der Jahresrente aus der Grösse der Einlage.

Eine $m$jährige Person A will sich mit dem Capital k eine Leibrente kaufen; welche Summe erhält sie alljährlich?

Behalten wir die vorige Bezeichnung bei, so muss die Gleichung

$$s \times r_m = k$$

erfüllt sein. Die Jahresrente s beträgt daher

$$s = \frac{k}{r_m}.$$

Beispiel. Welche Jahresrente kann sich ein 50jähriger Mann mit einer Einlage (k) von 12000 fl. bei 4 % Zinsen kaufen?

Da nach der Leibrententafel

$$r_{50} = 11{,}7582$$

ist, so wird die Jahresrente

$$s = \frac{12000}{11{,}7582} = 1020{,}56 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

§. 8.

II.

Aufgeschobene Leibrenten.

Eine $m$jährige Person A tritt nach x Jahren in den Besitz einer Leibrente von jährlich 1 fl. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Leibrente?

Bezeichnen wir den gesuchten Werth symbolisch mit

$$_x r_m,$$

wobei x zur linken Seite ausdrückt, um wieviel Jahre die Rente aufgeschoben ist, so können wir bemerken: der Werth, in welchen A nach x Jahren tritt, ist für jene Zeit ausgedrückt durch

$$r_{m+x}$$

und gegenwärtig beträgt er (auf x Jahre discontirt)

$$\varrho^x r_{m+x}.$$

Die Wahrscheinlichkeit in den Besitz dieser Rente zu treten ist wie früher

$$\frac{a_{m+x}}{a_m},$$

und folglich ist das Product aus beiden der gegenwärtige Werth der fraglichen Leibrente, welcher durch die Gleichung

$$_x r_m = \frac{a_{m+x}}{a_m} \varrho^x r_{m+x}$$

dargestellt ist und vermöge der Sterblichkeits- und Leibrententafel in allen Fällen gerechnet werden kann.

§. 9.

Werth der Einlage aus der Grösse der Jahresrente.

Will A unter den vorigen Umständen s fl. statt 1 fl. jährlich erheben und diese Leibrente mit der Einlage k kaufen, so muss die Einlage dem gegenwärtigen Werthe der Leibrente gleich, als die Gleichung

$$k = s \times \frac{a_{m+x}}{a_m} \varrho^x r_{m+x} \text{ oder}$$

$$k = s \times {}_x r_m$$

erfüllt sein.

Digitized by Google

Beispiele. 1) Ein 24jähriger Mann will sich eine Leibrente von 1000 fl. jährlich kaufen, aber erst nach 10 Jahren antreten. Welche Einlage ist bei 4% Zinsen zu leisten?

Nach den mitgetheilten Tafeln ist

$$a_m = a_{24} = 9085,\ s = 1000$$
$$a_{m+s} = a_{34} = 8445,\ \varrho = 0{,}9615$$
$$r_{m+n} = r_{34} = 15{,}7818,\ x = 10;$$

daher die Einlage

$$k = 1000\,\frac{8445}{9085}\,(0{,}9615)^{10} \times 15{,}7818;$$

und wenn man sich der Logarithmen bedient

$$\begin{aligned} \log s &= 3{,}0000000 \\ \log a_{34} &= 3{,}9265997 \\ C\log a_{24} &= 6{,}0416751\ [-10] \\ 10\log \varrho &= 9{,}8294930\ [-10] \\ \log r_{34} &= 1{,}1981398 \\ \hline \log k &= 3{,}9959076 \end{aligned}$$

mithin die Einlage

$$k = 9906{,}21 \text{ fl.}$$

2) Beispiel von Jones. Welches ist der baare Werth einer Leibrente von jährlich 30 fl., welche ein 36jähriger Mann nach 9 Jahren anzutreten und auf Lebenszeit zu geniessen hat bei 3% Zinsen?

Antw. 302,35 fl.

§. 10.

Werth der Jahresrente aus der Grösse der Einlage.

Ist eine auf n Jahre aufgeschobene Leibrente um die Summe k gekauft worden, so wird ihr eine Jahresrente s entsprechen, welche zu suchen ist.

Aus der Gleichung des vorigen Paragraphen

$$k = s \times {}_s r_m$$

folgt sogleich

$$s = \frac{k}{{}_s r_m} = \frac{k\,a_m}{a_{m+s}\,\varrho^s\,r_{m+s}}.$$

Digitized by Google

Beispiele. **1)** Eine 24jährige Frau wünscht sich gegen die Summe von 12000 fl. eine Leibrente zu kaufen, den Genuss derselben aber erst nach 6 Jahren antreten. Welche Jahresrente hat sie bei $3^1/_2\,\%$ Zinsen zu erwarten?

In diesem Falle ist

$$a_m = a_{24} = 8908,\quad k = 12000$$
$$a_{m+x} = a_{30} = 8304,\quad x = 6$$
$$r_{m+x} = r_{30} = 17{,}8979,\quad \varrho = \frac{100}{103{,}5};$$

und mittelst Logarithmen

$$\begin{aligned} log\ k &= 4{,}0791812 \\ log\ a_m &= 3{,}9497802 \\ C\ log\ a_{m+x} &= 6{,}0807127\ [-10] \\ C\ log\ r_{m+x} &= 8{,}7471979\ [-10] \\ C\ log\ \varrho &= 0{,}0896418 \\ \hline log\ s &= 2{,}9465138; \end{aligned}$$

folglich beträgt die gesuchte Rente

$$s = 884{,}13 \text{ fl.}$$

2) Beispiel (Jones). Ein Mann von 36 Jahren will eine nach 9 Jahren anzutretende Leibrente für die baare Summe von 400 fl. kaufen. Wie hoch wird die Leibrente sein?

Antw. 39,688 fl.

§. 11.

III.

Temporäre oder aufhörende Leibrenten.

Wird eine einfache Leibrente dahin modificirt, dass sie nicht bis zum Tode, sondern nur x Jahre dauert, so heisst sie eine temporäre Leibrente[1]). Ihre Berechnung fällt ganz

[1]) Temporäre Leibrenten sind nicht mit Annuitäten zu verwechseln. Jene haften an der Existenz einer Person oder deren Leben; diese nicht; oder mit andern Worten: Jene haben eine subjective, diese eine objective Dauer.

Digitized by Google

mit der der einfachen Leibrenten auf Lebensdauer zusammen und ist demnach durch

$$S\left(\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\right) = \frac{1}{a_m}\left(\varrho\, a_{m+1} + \varrho^2\, a_{m+2} + \ldots + \varrho^x\, a_{m+x}\right)$$

dargestellt, wornach jeder einzelne Fall berechnet werden kann. Ist man aber im Besitz einer Leibrententafel, so kann man mit Vortheil, besonders wenn x gross ist, den folgenden Weg einschlagen.

Bezeichnen wir, wie bisher mit

r_m die einfache Leibrente auf Lebenszeit,

${}_xr_m$ die x Jahre aufgeschobene,

so leuchtet sogleich ein, dass die Differenz

$$r_m - {}_xr_m$$

den gesuchten Werth der bis zum x^{ten} Jahr laufenden Leibrente ausdrückt. Wir haben demnach einerseits

$$S\left(\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\right) = r_m - {}_xr_m$$

andererseits in Beziehung auf die Tafeln

$$S\left(\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho_x\right) = r_m - \frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\, r_{m+x}$$

als Ausdruck des baaren Werthes einer bis zum x^{ten} Jahre laufenden (zahlbaren) Leibrente für eine $m$jährige Person.

§. 12.

Einlage aus der Jahresrente.

Eine $m$jährige Person hat x Jahre lang eine Jahresrente von s fl. zu geniessen. Welches ist der baare Werth dieser Rente?

Wie wir gerade gesehen haben, ist der baare Werth für 1 fl. Jahresrente

$$r_m - {}_xr_m,$$

daher für s fl. Rente $s$mal so gross.

Mithin

$$k = s \times [r_m - {}_xr_m] = s \times r_m - s \times {}_xr_m,$$

wenn wir mit k wieder die Einlage bezeichnen.

Digitized by Google

Beispiele. 1) Ein 24jähriger Mann bezieht bis zum 34ten Jahre seines Alters eine Jahresrente von 1000 fl. Welches ist der baare Werth dieser Rente bei 4 % Zinsen?

Da hier

$$s = 1000$$
$$r_m = r_{24} = 17{,}7349 \text{ oder}$$
$$s \times r_{24} = 17734{,}9$$

und nach §. 9. Beispiel **(1)**

$$s \times {}_x r_m = 9906{,}21$$

ist, so beträgt der gesuchte baare Werth

$$k = 17734{,}9 - 9906{,}21$$
$$= 7828{,}69 \text{ fl.}$$

2) Beispiel (Jones). Was ist eine nach 9 Jahren aufhörende Leibrente von jährlich 30 fl. für einen 36jährigen Mann baar werth? (3 % Zinsen.)

Antw. 221,364 fl.

§. 13.

Jahresrente aus der Einlage.

Erlegt eine $m$jährige Person die Einlage k, um eine Jahresrente von s fl. x Jahre lang zu geniessen, so folgt aus der Gleichung

$$k = s\,[r_m - {}_x r_m]$$

sogleich die Jahresrente

$$s = \frac{k}{r_m - {}_x r_m}.$$

Beispiel. Ein 24jähriger Mann wünscht gegen die Summe von 7828,69 fl. auf 10 Jahre eine Jahresrente sich zu kaufen. Wie gross wird sie sein bei 4 % Zinsen?

Vermöge der Tafeln und des vorigen Beispiels ist hier

$$k = 7828{,}69$$
$$r_m = 17{,}7349$$
$${}_x r_m = 9{,}90621$$

Digitized by Google

und demnach die Jahresrente

$$s = \frac{7828{,}69}{17{,}7349 - 9{,}90621} = \frac{7828{,}69}{7{,}82869}$$

$$s = 1000 \text{ fl.}$$

§. 14.

IV.

Aufgeschobene Leibrenten durch jährliche Einlage oder Prämien.

Eine $m$jährige Person A schliesst mit einer Renten-Anstalt einen Vertrag dahin ab, dass sie x Jahre lang jährlich den Beitrag b leisten will, um von dort an eine Leibrente s auf Lebenszeit geniessen. In welchem Zusammenhange stehen die gegenseitigen Leistungen?

Was A während x Jahre einzahlt, ist nichts anderes, als eine temporäre Leibrente auf x Jahre, welche durch

$$S\left[\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\right] \times b = \frac{b}{a_m}\left[\varrho\, a_{m+1} + \varrho^2\, a_{m+2} + \ldots + \varrho^x\, a_{m+x}\right]$$

oder durch

$$S\left[\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\right] \times b = \left[r_m - {}_x r_m\right] \times b$$

ausgedrückt ist. Wird aber schon zu Anfang des ersten Jahres der Beitrag b gezählt, so ist die Einzahlung des A um b grösser, also

$$b + \left[r_m - {}_x r_m\right] \times b = b\left[1 + r_m - {}_x r_m\right],$$

die Leistung der Anstalt hingegen ist eine auf x Jahre aufgeschobene Leibrente und daher durch

$$s \times \left[{}_x r_m\right] = s \times \frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\, r_{m+x}$$

ausgedrückt. Da nun, wie billig, beide Leistungen gleich sein müssen, so haben wir die Gleichung

$$b\left[1 + r_m - {}_x r_m\right] = s\left[{}_x r_m\right]$$

oder auch in Beziehung auf die Tabellen

$$b\left[1 + r_m - \frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\, r_{m+x}\right] = s \times \frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x\, r_{m+x}.$$

Digitized by Google

§. 15.

Die jährliche Prämie aus der Jahresrente.

Will eine $m$jährige Person A nach x Jahren eine Leibrente von jährlich s fl. antreten, so ist die jährliche Prämie b aus der letzten Gleichung durch

$$b = \frac{s \times \frac{a_{m+x}}{a_m} \varrho^x r_{m+x}}{1 + r_m - \frac{a_{m+x}}{a_m} \varrho^x r_{m+x}} = \frac{1 + r_m - {}_x r_m}{s \times {}_x r_m}$$

ausgedrückt.

Beispiel. Welche jährliche Prämie hat ein 30jähriger Mann zu leisten, wenn er mit seinem 45sten Lebensjahre eine lebenslängliche Rente von jährlich 1000 fl. geniessen will? (4% Zinsen.)

Es ist

$$\begin{aligned} a_{+mx} &= a_{45} = 7440; \quad s = 1000 \\ a_m &= a_{30} = 8717; \quad x = 15 \\ r_m &= r_{30} = 16{,}6315; \\ r_{m+x} &= r_{45} = 13{,}1409; \quad \varrho = \frac{1}{1{,}04}. \end{aligned}$$

Mittelst Logarithmen

$$\begin{aligned} log\ a_{45} &= 3{,}8715729 \\ C log\ a_{30} &= 6{,}0596330\ [-10] \\ 15\, log\ \varrho &= 9{,}7445005\ [-10] \\ log\ r_{45} &= 1{,}1186252 \\ \hline log\ [{}_x r_m] &= 0{,}7943316 \\ {}_x r_m &= 6{,}2277 \end{aligned}$$

Es wird demnach vermöge dieses Werthes

$$b = \frac{1000 \times 6{,}2277}{17{,}6315 - 6{,}2277} = \frac{6227{,}7}{11{,}4038}$$

b 546,98 fl.

Digitized by Google

§. 16.

Die Jahresrente aus der jährlichen Prämie.

Zahlt eine $m$jährige Person A eine jährliche Prämie b während x Jahre, so hat sie von da an eine Leibrente von jährlich s fl. zu geniessen, was durch die Gleichung

$$s = \frac{b\left[1 + r_m - \frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x r_{m+x}\right]}{\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x r_{m+x}}$$

ausgedrückt ist.

Beispiel. 1) Ein 30jähriger Mann zahlt bis zu seinem 45sten Jahre die Prämie von jährlich 546,98 fl., worauf er eine lebenslängliche Leibrente erhält. Wie gross ist die Jahresrente s bei 4%. Zinsen?

Mit Benützung des vorigen Beispiels ist hier

$$b = 546{,}98$$

$$\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x r_{m+x} = 6{,}2277$$

$$1 + r_m = 17{,}6315\,,$$

mithin die Jahresrente s

$$s = \frac{546{,}98\,(17{,}6315 - 6{,}2277)}{6{,}2277}$$

$$s = \frac{6227{,}7}{6{,}2277} = 1000 \text{ fl.}$$

2) Beispiel (Jones). Ein 36jähriger Mann zahlt 9 Jahre lang die Prämie von jährlich 36,087 fl. Welche Jahresrente wird er bei 3% Zinsen von seinem 45sten Jahre an lebenslänglich erhalten?

Antw. 30 fl.

Digitized by Google

2. Abtheilung.

Leibrenten für zwei und mehrere Personen.

§. 17.

I.

Verbindungsrenten.

Ist eine Leibrente von der Existenz zweier oder mehrer Leben abhängig, so soll sie Verbindungsrente heissen. Was aber die Combination solcher Renten hinsichtlich der Theilhaber betrifft, so ist, wie wir schon bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der coordinirten Existenz mehrerer Leben gesehen haben, eine solche Mannigfaltigkeit möglich, dass es so gut als unmöglich ist, alle hieher gehörigen Fälle zu behandeln. Zum Glück ist die Anzahl solcher Fälle, welche in der Praxis vorzukommen pflegen, eine ziemlich beschränkte. Wir werden desswegen in dem Nachfolgenden besonders die Verbindungsrente von zwei Personen betrachten.

§. 18.

II.

Die einfachen Eherenten.

Geniessen zwei verheirathete Personen nur so lange eine gewisse Rente, als beide zusammen am Leben sind, so heisst sie Eherente.

Zählt der Mann gegenwärtig

m Jahre und seine Frau

n Jahre,

so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beide nach x Jahren noch am Leben sein werden durch

$$p\,p_1 = \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}$$

ausgedrückt.

Digitized by Google

Nehmen wir ihre Jahresrente gleich 1 fl., so ist der nach x Jahren zahlbare Gulden gegenwärtig objectiv

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^x = \varrho^x$$

werth, wenn wir die frühere Bezeichnung beibehalten. Für das Ehepaar ist er aber ausgedrückt durch das Product

$$p\,p_1 = \left(\frac{1}{1+z}\right)^x = \varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} .$$

Daraus folgt der gegenwärtige Werth jeder einzelnen Jahresrente, wenn wir 1, 2, 3 .... statt x der Reihe nach schreiben; nämlich

$$\varrho \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \varrho^2 \frac{a_{m+2}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_n},\ \varrho^3 \frac{a_{m+3}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \ldots .$$

Werden alle diese Glieder in eine Summe vereinigt, so haben wir den baaren Werth der ganzen Eherente. Bezeichnen wir den ganzen Vorgang mit dem Buchstaben S, so ist der baare Werth der Eherente dargestellt durch

$$S\left[\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right] = \frac{1}{a_m a_n}\left[\varrho\, a_{m+1} a_{n+1} + \varrho^2 a_{m+2} a_{n+2} + \varrho^3 a_{m+3} a_{n+3} + \ldots .\right],$$

welcher Ausdruck in allen Fällen mittelst einer Sterblichkeitstafel, wenn auch nach Umständen mühsam, gefunden werden kann.

Bezeichnen wir noch analog r_m die Verbindungsrente zweier Personen des Alters m und n überhaupt durch

$$r_{m,n},$$

so können wir auch schreiben

$$r_{m,n} = \frac{1}{a_m a_n}\left[\varrho\, a_{m+1} a_{n+1} + \varrho^2 a_{m+2} a_{n+2} + \varrho^3 a_{m+3} a_{n+3} + \ldots\right]$$

Beispiel. Zählt der Mann gegenwärtig 90, die Frau 50 Jahre, so ist nach der Tafel von Brune ($3^1/_2$ %)

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rrr}
r_{90,\,50} = & 0{,}96618 \times 24 \times 6397 = & 148235{,}4 \\
& + 0{,}93351 \times 11 \times 6299 = & 64701{,}9 \\
& + 0{,}90194 \times \ 4 \times 6197 = & 22357{,}2 \\
& + 0{,}87144 \times \ 1 \times 6090 = & 5307{,}0 \\
\hline
& (46 \times 6492) & 240601{,}5
\end{array}
$$

oder

$$r_{90,\,50} = \frac{240601{,}5}{298632} = 0{,}8060 \text{ fl.}$$

Nach diesem Beispiele lassen sich alle rechnen; indessen sind, trotz der grossen Mannigfaltigkeit hinsichtlich der combinirten Alter, auch die Eherenten in hinlänglicher Ausdehnung berechnet und in Tabellen gebracht worden.

§. 19.

Berechnung von Eherenten-Tafeln.

Schreiben wir in der Gleichung

$$r_{m,n} = \frac{1}{a_m\, a_n} \left[\varrho\, a_{m+1}\, a_{n+1} + \varrho^2\, a_{m+2}\, a_{n+2} \ldots .\right]$$

$m+1$ statt m und $n+1$ statt n, so entsteht der Werth für ein Ehepaar, welches um 1 Jahr älter ist, nämlich:

$$r_{m+1,\,n+1} = \frac{1}{a_{m+1}\, a_{n+1}} \left[\varrho\, a_{m+2}\, a_{n+2} + \varrho^2\, a_{m+3}\, a_{n+3} \ldots .\right],$$

und wenn man letztere Gleichung mit ϱ multiplicirt und in beiden Gleichungen den Nenner wegschafft, so wird

$$a_m \times a_n \times r_{m,n} = \varrho\, a_{m+1}\, a_{n+1} + \varrho^2\, a_{m+2}\, a_{n+2} + \ldots$$

$$\varrho\, a_{m+1} \times a_{n+1} \times r_{m+1,\,n+1} = \qquad\qquad \varrho^2\, a_{m+2}\, a_{n+2} + \ldots$$

und durch Subtraction

$$a_m\, a_n\, r_{m,n} - \varrho\, a_{m+1}\, a_{n+1}\, r_{m+1,\,n+1} = \varrho\, a_{m+1}\, a_{n+1},$$

woraus sogleich

$$r_{m,n} = \frac{\varrho\, a_{m+1}\, a_{n+1}}{a_m\, a_n} \left(1 + r_{m+1,\,n+1}\right)$$

folgt. Diese Formel ist ganz analog jener für eine Person und empfiehlt sich als sehr zweckmässig zur Berechnung von Tafeln, indem man mit dem höchsten Alter anfängt und allmälig bis zum niedersten herabrechnet.

Digitized by Google

Beispiel. So ist der baare Werth einer Eherente für einen 90jährigen Mann und eine 50jährige Frau

$$= 0{,}806.$$

Nimmt man dasselbe Ehepaar um 1 Jahr jünger, so wird aus der obigen Gleichung mittelst der Tafeln von Brune ($3^1/_2\,\%$)

$$r_{89,\,49} = \frac{0{,}9661 \times 46 \times 6492}{80 \times 6584}\,(1 + 0{,}806)$$

$$= 0{,}9893.$$

Zur näheren Kenntniss solcher Tafeln theilen wir einen Auszug der nach Brune berechneten Tafeln mit; in grösserer Ausdehnung sind solche Tafeln zu finden: Baily, Theorie der Leibrenten etc., und David Jones, Leibrenten und Lebensversicherungen, übersetzt von Hattendorff.

§. 20.

Tabelle zur Werthbestimmung von Eherenten.

Folgende Tabelle enthält den gegenwärtigen Werth der Verbindungsrente von einen Gulden für einen Mann und eine Frau nach Brune's Sterblichkeitstafel zu $3^1/_2\,\%$.

Alter des Mannes	Alter der Frau					
	18	19	20	21	22	23
25	15,5506	15,5796	15,5991	15,6060	15,6007	15,5835
26	15,4275	15,4577	15,4783	15,4867	15,4829	15,4675
27	15,2972	15,3281	15,3501	15,3597	15,3576	15,3439
28	15,1590	15,1910	15,2139	15,2250	15,2242	15,2124
29	15,0147	15,0473	15,0714	15,0836	15,0845	15,0742
30	14,8637	14,8972	14,9220	14,9355	14,9378	14,9293
31	14,7058	14,7399	14,7658	14,7803	14,7840	14,7770
32	14,5427	14,5772	14,6039	14,6196	14,6244	14,6190
33	14,3757	14,4108	14,4380	14,4547	14,4609	14,4569
34	14,2065	14,2420	14,2699	14,2874	14,2947	14,2922
35	14,0334	14,0692	14,0976	14,1159	14,1243	14,1231
36	13,8543	13,8904	13,9193	13,9383	13,9476	13,9476
37	13,6707	13,7069	13,7363	13,7560	13,7662	13,7673
38	13,4844	13,5207	13,5503	13,5706	13,5816	13,5838
39	13,2952	13,3315	13,3613	13,3820	13,3939	13,3970

Digitized by Google

Alter des Mannes	Alter der Frau					
	18	19	20	21	22	23
40	13,1030	13,1393	13,1692	13,1903	13,2028	13,2069
41	12,9059	12,9421	12,9722	12,9935	13,0065	13,0115
42	12,7022	12,7380	12,7681	12,7898	12,8032	12,8089
43	12,4911	12,5268	12,5567	12,5786	12,5925	12,5987
44	12,2744	12,3096	12,3395	12,3614	12,3756	12,3825
45	12,0515	12,0864	12,1160	12,1380	12,1525	12,1598
46	11,8242	11,8584	11,8878	11,9097	11,9244	11,9322
47	11,5920	11,6257	11,6545	11,6764	11,6912	11,6993
48	11,3564	11,3896	11,4181	11,4395	11,4545	11,4629
49	11,1174	11,1499	11,1779	11,1993	11,2140	11,2228
50	10,8731	10,9049	10,9324	10,9535	10,9683	10,9796
	24	25	26	27	28	29
25	15,5549	15,5159	15,4673	15,4121	15,3517	15,2877
26	15,4410	15,4041	15,3578	15,3050	15,2471	15,1856
27	15,3194	15,2847	15,2406	15,1903	15,1350	15,0761
28	15,1897	15,1572	15,1155	15,0676	15,0148	14,9586
29	15,0536	15,0231	14,9837	14,9382	14,8880	14,8344
30	14,9104	14,8820	14,8449	14,8018	14,7542	14,7033
31	14,7601	14,7336	14,6988	14,6581	14,6129	14,5648
32	14,6038	14,5795	14,5467	14,5084	14,4658	14,4202
33	14,4433	14,4209	14,3903	14,3542	14,3141	14,2712
34	14,2802	14,2596	14,2311	14,1974	14,1596	14,1192
35	14,1128	14,0939	14,0674	14,0358	14,0005	13,9625
36	13,9388	13,9217	13,8970	13,8676	13,8345	13,7991
37	13,7598	13,7444	13,7217	13,6942	13,6634	13,6304
38	13,5776	13,5637	13,5429	13,5174	13,4886	13,4579
39	13,3921	13,3795	13,3603	13,3369	13,3102	13,2816
40	13,2031	13,1920	13,1742	13,1525	13,1279	13,1015
41	13,0088	12,9990	12,9828	12,9626	12,9398	12,9157
42	12,8071	12,7986	12,7839	12,7653	12,7442	12,7219
43	12,5979	12,5904	12,5770	12,5602	12,5407	12,5202
44	12,3824	12,3759	12,3638	12,3483	12,3307	12,3118
45	12,1605	12,1549	12,1439	12,1298	12,1135	12,0966
46	11,9334	11,9288	11,9188	11,9059	11,8911	11,8756
47	11,7012	11,6973	11,6884	11,6766	11,6631	11,6490
48	11,4653	11,4621	11,4541	11,4433	11,4310	11,4183
49	11,2255	11,2223	11,2158	11,2061	11,1948	11,1833
50	10,9802	10,9782	10,9717	10,9629	10,9528	10,9424

Digitized by Google

Alter des Mannes	Alter der Frau					
	30	31	32	33	34	35
25	15,2178	15,1416	15,0608	14,9729	14,8796	14,7786
26	15,1184	15,0450	14,9669	14,8820	14,7916	14,6935
27	15,0116	14,9410	14,8658	14,7837	14,6964	14,6014
28	14,8968	14,8290	14,7568	14,6778	14,5935	14,5017
29	14,7755	14,7106	14,6413	14,5654	14,4843	14,3957
30	14,6471	14,5852	14,5189	14,4461	14,3683	14,2830
31	14,5114	14,4524	14,3893	14,3196	14,2450	14,1631
32	14,3697	14,3136	14,2535	14,1871	14,1158	14,0372
33	14,2234	14,1709	14,1131	14,0500	13,9821	13,9070
34	14,0742	14,0240	13,9700	13,9099	13,8453	13,7738
35	13,9202	13,8728	13,8218	13,7651	13,7036	13,6356
36	13,7593	13,7148	13,6668	13,6131	13,5552	13,4905
37	13,5932	13,5513	13,5063	13,4558	13,4011	13,3401
38	13,4233	13,3842	13,3419	13,2945	13,2430	13,1854
39	13,2494	13,2130	13,1736	13,1291	13,0809	13,0266
40	13,0716	13,0377	13,0010	12,9595	12,9144	12,8635
41	12,8880	12,8564	12,8224	12,7838	12,7418	12,6942
42	12,6965	12,6674	12,6359	12,6001	12,5610	12,5167
43	12,4967	12,4700	12,4410	12,4078	12,3717	12,3305
44	12,2903	12,2656	12,2391	12,2086	12,1752	12,1372
45	12,0768	12,0541	12,0298	12,0019	11,9713	11,9362
46	11,8578	11,8371	11,8148	11,7891	11,7612	11,7289
47	11,6328	11,6140	11,5938	11,5703	11,5448	11,5153
48	11,4036	11,3865	11,3682	11,3469	11,3237	11,2968
49	11,1701	11,1546	11,1380	11,1188	11,0978	11,0733
50	10,9304	10,9164	10,9016	10,8841	10,8652	10,8431
51	10,6826	10,6700	10,6567	10,6411	10,6241	10,6042
52	10,4282	10,4168	10,4048	10,3908	10,3758	10,3579
53	10,1665	10,1565	10,1458	10,1332	10,1198	10,1039
54	9,8994	9,8920	9,8810	9,8697	9,8578	9,8437
55	9,6264	9,6182	9,6099	9,6002	9,5896	9,5771
56	9,3492	9,3418	9,3345	9,3258	9,3168	9,3057
57	9,0693	9,0628	9,0563	9,0487	9,0407	9,0133
58	8,7853	8,7795	8,7738	8,7670	8,7602	8,7517
59	8,4989	8,4937	8,4887	8,4828	8,4768	8,4696
60	8,2121	8,2074	8,2030	8,1979	8,1927	8,1864

Digitized by Google

Alter des Mannes	Alter der Frau					
	36	37	38	39	40	41
40	12,8063	12,7421	12,6722	12,5940	12,5051	12,4046
41	12,6405	12,5801	12,5140	12,4401	12,3556	12,2596
42	12,4665	12,4098	12,3476	12,2777	12,1978	12,1064
43	12,2837	12,2307	12,1725	12,1067	12,0310	11,9445
44	12,0936	12,0442	11,9898	11,9281	11,8568	11,7748
45	11,8959	11,8498	11,7992	11,7416	11,6746	11,5972
46	11,6917	11,6492	11,6021	11,5485	11,4858	11,4130
47	11,4812	11,4418	11,3984	11,3485	11,2900	11,2217
48	11,2655	11,2294	11,1893	11,1433	11,0877	11,0248
49	11,0448	11,0117	10,9749	10,9324	10,8819	10,8222
50	10,8172	10,7870	10,7534	10,7143	10,6676	10,6122
51	10,5807	10,5533	10,5227	10,4870	10,4439	10,3926
52	10,3367	10,3119	10,2842	10,2517	10,2122	10,1648
53	10,0850	10,0626	10,0376	10,0081	9,9720	9,9284
54	9,8268	9,8067	9,7843	9,7577	9,7249	9,6848
55	9,5621	9,5441	9,5242	9,5003	9,4705	9,4340
56	9,2924	9,2764	9,2587	9,2374	9,2105	9,1772
57	9,0194	9,0052	8,9895	8,9706	8,9465	8,9163
58	8,7417	8,7291	8,7153	8,6985	8,6769	8,6497
59	8,4606	8,4497	8,4377	8,4229	8,4037	8,3792
60	8,1787	8,1692	8,1587	8,1459	8,1288	8,1068
61	7,8981	7,8899	7,8808	7,8696	7,8546	7,8349
62	7,6217	7,6145	7,6068	7,5971	7,5838	7,5664

§. 21.

Die Einlage aus der Jahresrente einer Eherente.

Ein $m$jähriger Mann und seine $n$jährige Frau geniessen, so lange ihre Ehe dauert, eine Jahresrente von s fl. Welches ist der baare Werth der ganzen Rente?

Da die Jahresrente von 1 fl. gegenwärtig

$$r_{m,\,n}$$

werth ist, so wird eine Jahresrente von s fl. werth sein, wenn wir diesen Werth mit k bezeichnen

$$k = s \times r_{m,\,n}.$$

Digitized by Google

Beispiel. Was ist gegenwärtig eine Leibrente von 500 fl. werth, welche ein 30jähriger Mann und seine 24jährige Frau während ihrer Ehedauer jährlich geniessen? ($3\frac{1}{2}$ %.)

Wegen $m = 30$ und $n = 24$
ist nach unsrer Tafel

$$r_{30,\,24} = 14{,}9104$$

und folglich

$$k = 500 \times 14{,}9104 = 7455{,}2 \text{ fl.}$$

§. 22.

Die Jahresrente aus der Einlage einer Eherente.

Ein $m$jähriger Mann und seine $n$jährige Frau wollen gegen die Einlage von k fl. eine Eherente kaufen. Welche Jahresrente s wird dieser Einlage entsprechen?

Aus der vorigen Gleichung folgt unmittelbar

$$s = \frac{k}{r_{m,\,n}}.$$

Beispiel. Welche Jahresrente erhält ein Ehepaar in dem respectiven Alter von 30 und 24 Jahren gegen die Einlage von 7455,2 fl., wenn sie nur so lange ausbezahlt wird, als ihre Ehe dauert? ($3\frac{1}{2}$ %.)

Wegen $k = 7455{,}2$ und $r_{30,\,24} = 14{,}9104$
wird

$$s = \frac{7455{,}2}{14{,}9104} = 500 \text{ fl.}$$

§. 23.

Aufgeschobene Eherenten.

Was von der aufgeschobenen Leibrente für Eine Person gesagt wurde, gilt vollkommen auch für zwei Personen. Für Eine Person ist der Werth einer aufgeschobenen Leibrente

$${}_x r_m = \frac{a_{m+x}}{a_m}\, \varrho^x\, r_{m+x}.$$

Digitized by Google

Daraus folgt jener für zwei Personen, indem wir

$$r_{m,n} \quad \text{anstatt} \quad r_m$$

$$\frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \quad \text{,,} \quad \frac{a_{m+x}}{a_m}$$

$$r_{m+x,\,n+x} \quad \text{,,} \quad r_{m+x}$$

schreiben, wobei x ausdrückt, um wie viel Jahre die Rente aufgeschoben sein soll. Der gesuchte Werth ist demnach ausgedrückt durch

$${}_x r_{m,n} = \left[\frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\, \varrho^x\, r_{m+x,\,n+x}\right].$$

Beispiel. Was ist eine nach 15 Jahren anzutretende Eherente von jährlich 400 fl. für einen Mann von 30 und eine Frau von 27 Jahren gegenwärtig werth? ($3^1/_2\,\%$.)

In diesem Falle ist

$$m = 30,\ n = 27,\ x = 15$$
$$a_{30} = 8717,\ r_{45,\,42} = 11{,}5085$$
$$a_{27} = 8600,\ \varrho = 0{,}96618$$
$$a_{45} = 7440,\ \varrho^{15} = 0{,}61894$$
$$a_{42} = 7187.$$

Vermittelst Logarithmen

$$\begin{aligned}
log\ a_{45} &= 3{,}8715729\\
log\ a_{42} &= 3{,}8565476\\
C\,log\ a_{30} &= 6{,}0596330\ [-10]\\
C\,log\ a_{27} &= 6{,}0655015\ [-10]\\
15\ log\ \varrho &= 9{,}7916486\ [-10]\\
log\ r_{45,\,42} &= 1{,}0610187\\
\hline
log\ [{}_{15}r_{30,\,27}] &= 0{,}6901685
\end{aligned}$$

Daher

$$4{,}8997\ \text{fl.} = {}_{15}r_{30,\,27}$$

für 1 fl. Jahresrente; und folglich ist der baare Werth einer Jahresrente von 400 fl.

$$k = 400 \times 4{,}8997 = 1959{,}88\ \text{fl.}$$

Digitized by Google

§. 24.

Temporäre oder aufhörende Eherenten.

Ist der Mann wieder m und seine Frau n Jahre alt, und nehmen wir an, die Eherente höre mit dem x^{ten} Jahre auf, bezeichnen wir ferner wie bisher mit

$r_{m,n}$ Eherente auf die ganze Dauer

${}_xr_{m,n}$ Eherente um x Jahre aufgeschoben;

so ist auch hier durch die Differenz

$$r_{m,n} - {}_xr_{m,n}$$

der Werth einer temporären Eherente von 1 fl. ausgedrückt; oder auch in Beziehung auf die Tabellen durch

(1) $$r_{m,n} - {}_xr_{m,n} = r_{m,n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \varrho^x r_{m+x,\,n+x}.$$

Beträgt hingegen die Jahresrente s fl., so ist der baare Werth oder die Einlage (k) ausgedrückt durch

(2) $$k = s\,[r_{m,n} - {}_xr_{m,n}].$$

Ist umgekehrt der baare Werth oder die Einlage gegeben, so ist die Jahresrente durch

(3) $$s = \frac{k}{r_{m,n} - {}_xr_{m,n}}$$

bestimmt.

Beispiele. 1) Welches ist der baare Werth einer Eherente von jährlich 500 fl. für einen Mann von 30 und eine Frau von 27 Jahren, wenn dieselbe nach 20 Jahren erlischt? ($3^1/_2\,\%$.)

$$m = 30,\ n = 27,\ x = 20$$
$$a_{30} = 8717,\ r_{30,27} = 14{,}8018$$
$$a_{50} = 6845,\ r_{50,47} = 10{,}0799$$
$$a_{27} = 8600,\ \varrho = 0{,}96618$$
$$a_{47} = 6762.$$

Digitized by Google

Vermittelst Logarithmen

$$\begin{aligned} log\ a_{50} &= 3{,}8353735 \\ log\ a_{47} &= 3{,}8300752 \\ C\,log\ a_{30} &= 6{,}0596330\ [-10] \\ C\,log\ a_{27} &= 6{,}0655015\ [-10] \\ 20\ log\ \varrho &= 9{,}7011600\ [-10] \\ log\ r_{50,\,47} &= 1{,}0034563 \\ \hline log\ [{}_{x}r_{m,\,n}] &= 0{,}4951995 \end{aligned}$$

und

$${}_{x}r_{m,\,n} = 3{,}1274;$$

mithin

$$\begin{aligned} k &= 500\ [14{,}8018 - 3{,}1274] \\ &= 5337{,}2\ \text{fl.} \end{aligned}$$

2) Ein 30jähriger Mann und seine 27jährige Frau kaufen sich auf 20 Jahre eine Eherente gegen die Einlage von 5337,2 fl. Welches ist die Jahresrente bei $3^1/_2\,\%$ Zinsen?

Die Jahresrente ist allgemein ausgedrückt durch

$$s = \frac{k}{r_{m,\,n} - {}_{x}r_{m,\,n}}$$

und mit Beziehung auf das vorige Beispiel

$$s = \frac{5337{,}2}{14{,}8018 - 3{,}1274} = 500\ \text{fl.}$$

§. 25.

III.

Verbindungsrenten für zwei beliebige Personen.

Wird eine Rente nur so lange gezahlt, als zwei Personen zugleich am Leben sind, so gelten für alle hieher gehörigen Fragen die über die Eherenten gemachten Erörterungen ohne alle Veränderung. Haftet hingegen die Zahlbarkeit der Rente an andern Bedingungen, so sind besondere Erörterungen nöthig, welche wir in dem Nachfolgenden machen wollen.

Digitized by Google

§. 26.

Leibrenten auf die längstlebende von zwei Personen.

Zwei Personen A und B des Alters m und n geniessen eine Leibrente so lange, als wenigstens noch eine von beiden am Leben ist. Es soll der baare Werth dieser Rente gesucht werden.

Nehmen wir wieder die Jahresrente gleich 1 fl., so ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach x Jahren wenigstens Eine von ihnen am Leben sein wird

$$p\,p_1 + p(1-p_1) + (1-p)\,p_1\ ^1)$$

$$= \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} + \frac{a_{m+x}}{a_m}\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right) + \left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\frac{a_{n+x}}{a_n},$$

oder wenn man ausmultiplicirt

$$p + p_1 - p\,p_1 = \frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n};$$

der in x Jahren zahlbare Gulden ist gegenwärtig werth

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^x = \varrho^x,$$

das Product aus beiden Ausdrücken ist der gegenwärtige Werth der Jahresrente, in x Jahren zahlbar, nämlich

$$\varrho^x \left[\frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right].$$

Der totale Werth wird daraus erhalten, indem x der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3 \ldots$ erhält, und die einzelnen Glieder summirt werden. Um uns kurz zu fassen, zeigen wir, wie früher, den ganzen Vorgang durch den Buchstaben S an, wodurch wir erhalten, wenn zuerst noch multiplicirt wird,

$$S\left[\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} + \varrho^x \frac{a_{n+x}}{a_n} - \varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right]$$

$$= \varrho \frac{a_{m+1}}{a_m} + \varrho^2 \frac{a_{m+2}}{a_m} + \varrho^3 \frac{a_{m+3}}{a_m} + \ldots.$$

$$+ \varrho \frac{a_{n+1}}{a_n} + \varrho^2 \frac{a_{n+2}}{a_n} + \varrho^3 \frac{a_{n+3}}{a_n} + \ldots.$$

$$- \varrho \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varrho^2 \frac{a_{m+2}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_n} - \ldots.$$

---

[1]) Man vergleiche: **Dr. Albert Wild,** Probleme der Statistik etc., München, Fleischmann, 1862, §. 29 u. 32; oder: **Dr. Albert Wild,** Politische Rechnungswissenschaft etc., München, Fleischmann, 1862, §. 113 u. 116.

Digitized by Google

Betrachten wir jede horizontale Reihe für sich, so ist ihr Werth nach den früheren Paragraphen sehr leicht zu bestimmen.

Die erste Reihe bedeutet eine Leibrente auf Lebensdauer für A; die zweite für B; und endlich die dritte eine Verbindungsrente für die Existenz von A und B zugleich.

Behalten wir die frühere Bezeichnung bei, so ist der baare Werth durch

$$S\left[\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} + \varrho^x \frac{a_{n+x}}{a_n} - \varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right] = r_m + r_n - r_{m,n}$$

ausgedrückt, dessen Berechnung mittelst der bisher benützten Tabellen ohne alle Mühe geschieht.

§. 27.

Die Einlage aus der Jahresrente.

Geniessen unter den vorigen Umständen A und B die Jahresrente s, so ist ihre Einlage k durch die Gleichung

$$k = s\,[r_m + r_n - r_{m,n}]$$

bestimmt.

Beispiel. Ein 30jähriger Mann und seine 25jährige Frau wünschen eine Jahresrente von 1000 fl. so lange zu geniessen, als Eines von ihnen noch am Leben ist. Was haben sie einzubezahlen? ($3\frac{1}{2}\%$.)

Nach den Tafeln von Brune ist wegen

$$\begin{aligned} m &= 30,\ n = 25 \\ r_{30} &= 17{,}8299 \\ r_{25} &= 18{,}5813 \\ &\overline{36{,}4112} \\ r_{30,25} &= 14{,}8820 \\ &\overline{21{,}5292} \end{aligned}$$

und folglich

$$k = 1000 \times 21{,}5292 = 21529{,}2 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

§. 28.

Die Jahresrente aus der Einlage.

Wird umgekehrt die Jahresrente s aus der Einlage k gesucht, so ist diese ausgedrückt durch

$$s = \frac{k}{r_m + r_n - r_{m,n}}.$$

Beispiel. Welche Jahresrente kann sich ein Ehepaar im Alter von 36 und 28 Jahren gegen die Einlage von 15000 fl. kaufen, wenn dieselbe erst mit ihrem beiderseitigen Aussterben erlischt? ($3^1/_2$ %.)

Es ist hier

$$\begin{aligned} r_{36} &= 16{,}3407 \\ r_{28} &= 18{,}1875 \\ \hline & 34{,}5272 \\ r_{36,28} &= 13{,}8345 \\ \hline & 20{,}6972 \end{aligned}$$

und folglich

$$s = \frac{15000}{20{,}6927} = 724{,}89 \text{ fl.}$$

§. 29.

Aufgeschobene Leibrenten auf die längstlebende von zwei Personen, ohne und mit Bedingungen.

Ist die Leibrente des vorigen Paragraphen um x Jahre aufgeschoben, so beginnt sie mit dem $(x+1)^{\text{ten}}$ Jahre, und wir haben in der vorigen Entwicklung nicht mehr

$$x = 1,\ 2,\ 3 \text{ etc.}$$

zu setzen, sondern die Werthe sind der Reihe nach

$$x+1,\ x+2,\ x+3 \text{ etc.},$$

wodurch wir folgende 3 Reihen erhalten:

Digitized by Google

$$\varrho^{x+1}\frac{a_{m+x+1}}{a_m}+\varrho^{x+2}\frac{a_{m+x+2}}{a_m}+\varrho^{x+3}\frac{a_{m+x+3}}{a_m}+\ldots.$$

$$+\varrho^{x+1}\frac{a_{n+x+1}}{a_n}+\varrho^{x+2}\frac{a_{n+x+2}}{a_n}+\ldots.$$

$$+\varrho^{x+1}\frac{a_{m+x+1}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x+1}}{a_n}+\varrho^{x+2}\frac{a_{m+x+2}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x+2}}{a_n}+\ldots.$$

Wird in der ersten Reihe Zähler und Nenner mit a_{m+x}, in der zweiten mit a_{n+x}, in der dritten mit $a_{m+x}\times a_{n+x}$ multiplicirt, so erhalten wir

$$\varrho^x\frac{a_{m+x}}{a_m}\left(\varrho\frac{a_{m+x+1}}{a_{m+x}}+\varrho^2\frac{a_{m+x+2}}{a_{m+x}}+\ldots.\right)$$

$$+\varrho^x\frac{a_{n+x}}{a_n}\left(\varrho\frac{a_{n+x+1}}{a_{n+x}}+\varrho^2\frac{a_{n+x+2}}{a_{n+x}}+\ldots.\right)$$

$$+\varrho^x\frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}\left(\varrho\frac{a_{m+x+1}}{a_{m+x}}\cdot\frac{a_{n+x+1}}{a_{n+x}}+\ldots.\right)$$

Die erste Klammer bedeutet eine Leibrente für das Alter $m+x$, die zweite für das Alter $n+x$ und die dritte eine Verbindungsrente der vorigen Alter. Führen wir die entsprechende Bezeichnung ein, so ist der Werth der fraglichen Rente

(1) $${}_xr_m+{}_xr_n-{}_xr_{m,\,n}$$

$$=\frac{a_{m+x}}{a_m}\varrho^x r_{m+x}+\frac{a_{n+x}}{a_n}\varrho^x r_{n+x}-\frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}\varrho^x r_{m+x,\,n+x}$$

$$=\varrho^x\left(\frac{a_{m+x}}{a_m}r_{m+x}+\frac{a_{n+x}}{a_n}r_{n+x}-\frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}r_{m+x,\,n+x}\right).$$

Wäre aber die Bedingung gemacht, dass A und B beim Antritt der Rente noch leben müssen, so wird der Werth ein ganz anderer, welchen wir durch folgende einfache Betrachtung erhalten.

Sind A und B respective m und n Jahre alt, so ist der gegenwärtige Werth einer Rente für ihr jetziges Alter, wie wir gesehen haben,

$$r_m+r_n-r_{m,\,n};$$

für ihr Alter nach x Jahren hingegen

$$\varrho^x\left(r_{m+x}+r_{n+x}-r_{m+x,\,n+x}\right);$$

Digitized by Google

die Wahrscheinlichkeit, dass beide dieses Alter erreichen, also in den Genuss dieser Rente treten, ist wie oben

$$\frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n};$$

und folglich ist die fragliche um x Jahre aufgeschobene Rente gegenwärtig werth

(2) $$\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} (r_{m+x} + r_{n+x} - r_{m+x,\, n+x}).$$

§. 30.

Einlage aus der Jahresrente.

Geniessen A und B nach x Jahren eine Jahresrente s, so beträgt die Einlage (k), im Falle keine Bedingung des gemeinschaftlichen Antritts gemacht ist,

(1) $$k = s\,[{}_x r_m + {}_x r_n - {}_x r_{m,\, n}]$$

$$= s \times \varrho^x \left(\frac{a_{m+x}}{a_m} r_{m+x} + \frac{a_{n+x}}{a_n} r_{n+x} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} r_{m+x,\, n+x} \right);$$

und im Falle beide die Rente anzutreten haben

(2) $$k = s \times \varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} (r_{m+x} + r_{n+x} - r_{m+x,\, n+x}).$$

Beispiel. Ein 30jähriger Mann und seine 18jährige Frau wollen eine Leibrente von jährlich 1000 fl. kaufen, selbe aber erst nach 10 Jahren antreten, und so lange beziehen, als noch Eines von ihnen am Leben ist. Welchen Einsatz haben sie gegenwärtig zu leisten:

1) wenn nur Eines,

2) wenn Beide beim Antritte der Rente am Leben sein müssen? ($3^1/_2$ %.)

1. Fall. Hier haben wir allgemein

$$k = s \cdot \varrho^x ({}_x r_m + {}_x r_n - {}_x r_{m,\, n})$$

und nach den Tabellen:

Digitized by Google

$a_{m+z} = a_{40} = 7943 \quad r_{40} = 15{,}2840$
$a_m = a_{30} = 8717 \quad r_{28} = 18{,}1875$
$a_{n+z} = a_{28} = 8501 \quad r_{40,\,28} = 13{,}1279$
$a_n = a_{18} = 9682 \quad \varrho = 0{,}9615.$

Mit diesen Werthen findet man

${}_z r_m = {}_{10}r_{30} = 13{,}927$
${}_z r_n = {}_{10}r_{18} = 15{,}969$
${}_z r_{m,\,n} = {}_{10}r_{30,\,18} = 10{,}496$ und
$k = 1000 \times 0{,}7089 \times 19{,}4 = 13652{,}66$ fl.

2. Fall. Hier ist allgemein

$$k = s \cdot \varrho^z \frac{a_{m+z}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+z}}{a_n} (r_{m+z} + r_{n+z} - r_{m+z,\,n+z})$$

und der Aufgabe zufolge

$$k = 1000 \times 0{,}7089 \frac{7943}{8717} \cdot \frac{8501}{9682} \cdot 20{,}3436$$
$$= 11538{,}1 \text{ fl.}$$

§. 31.

Die Jahresrente aus der Einlage.

Machen unter denselben Umständen wie vorhin A und B die Einzahlung von k fl., so haben sie eine Jahresrente von s fl. zu beanspruchen, welche allgemein entweder durch

$$\textbf{(1)} \qquad s = \frac{k}{{}_z r_m + {}_z r_n - {}_z r_{m,\,n}}$$

oder durch

$$\textbf{(2)} \qquad s = \frac{k}{\varrho^z \frac{a_{m+z}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+z}}{a_n} (r_{m+z} + r_{n+z} - r_{m+z,\,n+z})}$$

ausgedrückt ist, je nachdem sie verpflichtet, dass entweder nur Eines, oder Beide zugleich die aufgeschobene Rente antreten.

Beispiel. Ein 30jähriger Mann und seine 18jährige Frau kaufen eine nach 10 Jahren anzutretende Rente

Digitized by Google

gegen die baare Einzahlung von 11538,1 fl. Wie gross ist die entsprechende Jahresrente unter der Bedingung, dass Beide beim Antritte der Rente noch am Leben sind?

Mit Benützung des vorigen Beispiels ist nach Gleichung **(2)**

$$s = \frac{11538{,}1}{11{,}5381} = 1000 \text{ fl.}$$

§. 32.

Die Einzahlung durch Prämien.

Anstatt die Einzahlung k auf einmal zu leisten, kann es auch gestattet sein, dieselbe Summe in jährlichen Raten oder Prämien einzuzahlen. Es sei die Grösse b der jährlichen Prämie zu bestimmen.

Nehmen wir an, die Einzahlung muss in x Jahren vollendet sein, so ist der Werth der Prämie

b im x^{ten} Jahre zahlbar,

auf die Gegenwart discontirt

$$b\left(\frac{1}{1+z}\right)^x = b\varrho^x;$$

die Wahrscheinlichkeit, dass bis dahin von A und B wenigstens Eines am Leben sein wird, ist

$$\frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n};$$

das Product aus beiden

$$b \cdot \varrho^x \left[\frac{a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right]$$

ist der gegenwärtige Werth der Prämie b, welche im x^{ten} Jahre eingezahlt wird. Wird darin statt x der Reihe nach 1, 2, 3..... gesetzt, so drückt die Summe aller dadurch entstandenen Glieder den Totalwerth aller Prämien aus, welche innerhalb x Jahren

Digitized by Google

eingezahlt werden und dem Betrage von k gleichkommen müssen. Wir haben demnach die Gleichung

$$\textbf{(1)} \quad k = b \times S \left[\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} + \varrho^x \frac{a_{n+x}}{a_n} - \varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \right].$$

In Beziehung auf die früheren Erörterungen bedeutet aber der Summenausdruck eine temporäre Rente auf x Jahre, welche durch die Differenz einer Rente auf Lebenszeit und einer um x Jahre aufgeschobenen ausgedrückt ist. Darnach können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} k &= b\,[r_m + r_n - r_{m,n}] - b\,[{}_xr_m + {}_xr_n - {}_xr_{m,n}] \\ &= b\,[(r_m - {}_xr_m) + (r_n - {}_xr_n) - (r_{m,n} - {}_xr_{m,n})]. \end{aligned}$$

Und die Prämie b selbst ist demnach durch die Gleichung

$$\textbf{(2)} \quad b = \frac{k}{[(r_m - {}_xr_m) + (r_n - {}_xr_n) - (r_{m,n} - {}_xr_{m,n})]}$$

bestimmt, welcher Ausdruck in jedem gegebenen Fall nach den Erläuterungen der früheren Paragraphen gerechnet werden kann. Beginnt aber die Einzahlung zu Anfang des ersten Jahres, so besteht die Gleichung

$$\textbf{(3)} \quad k = b + b\,[(r_m - {}_xr_m) + (r_n - {}_xr_n) - (r_{m,n} - {}_xr_{m,n})].$$

§. 33.

IV.

Verbindungsrenten für drei Personen.

Drei Personen, A, B und C beziehen eine Leibrente so lange, als alle drei noch am Leben sind. Es sei der baare Werth dieser Rente zu bestimmen.

Die Jahresrente sei wieder 1 fl.; ihr gegenwärtiges Alter beziehungsweise

$$m,\ n \text{ und } q \text{ Jahre;}$$

so ist der Werth des im x^{ten} Jahre zahlbaren Guldens auf die Gegenwart discontirt

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^x = \varrho^x;$$

Digitized by Google

die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei bis dahin am Leben sein werden

$$\frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{q+x}}{a_q}.$$

Das Product aus beiden

$$\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{q+x}}{a_q}$$

ist der baare Werth der Jahresrente des x^{ten} Jahres. Der Totalwerth wird dadurch erhalten, dass x der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 .... annimmt, und die einzelnen Glieder in eine Summe vereinigt werden. Analog der früheren Bezeichnung haben wir

$$r_{m,\,n,\,q} = S\left[\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{q+x}}{a_q}\right]$$

als den gesuchten Werth, welcher, wenn auch etwas mühesam, immer berechnet werden kann. Die Berechnung kann durch Tafeln nicht erleichtert werden, da bis jetzt solche nicht existiren, was seinen Grund darin hat, weil die Herstellung einer Tafel einerseits ungemein umständlich, andrerseits nur selten hiehergehörige Fälle vorkommen, mit Ausnahme der Waisenpensionen[1]).

§. 34.

Leibrenten auf die längstlebende von drei Personen.

Drei Personen, A, B und C geniessen gemeinschaftlich eine Leibrente so lange, als noch Eine am Leben ist. Es soll der baare Werth dieser Rente gesucht werden.

---

[1]) Hat man einen vorgelegten Fall zu berechnen, so kann man sich die Arbeit dadurch erleichtern, dass man periodenweise etwa je 10 Glieder allein berechnet und zwar dadurch, dass man das mittlere Glied anstatt der übrigen nimmt. Auf diese Weise kann man in kurzer Zeit 30 bis 05 Glieder mit ziemlicher Genauigkeit berechnen, ohne eine Hilfstafel zu haben. Bei grosser Genauigkeit ist dieses Mittel nicht räthlich.

Digitized by Google

Dieser Fall unterscheidet sich von dem vorigen nur durch die Aenderung der Wahrscheinlichkeit. Alle übrigen Bemerkungen gelten hier wieder. Mit Zugrundelegung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphs ist die Wahrscheinlichkeit, dass im x^{ten} Jahre Eine oder die Andere noch am Leben sein wird

$$1-(1-p)(1-p_1)(1-p_2) = p+p_1+p_2-pp_1-pp_2 \\ -p_1p_2+pp_1p_2;^{1})$$

oder in Beziehung auf die Sterblichkeitstafeln

$$\frac{a_{m+x}}{a_m}+\frac{a_{n+x}}{a_n}+\frac{a_{q+x}}{a_q}-\frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}-\frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q} \\ -\frac{a_{n+x}}{a_n}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q}+\frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q}.$$

Wird nun diese Wahrscheinlichkeit mit

$$\varrho^x$$

multiplicirt, so hat man den gegenwärtigen Werth des im x^{ten} Jahre zahlbaren Guldens. Wird dann nach Angabe des vorigen Paragraphen davon die Summe genommen, so erhalten wir den Totalwerth durch

$$r_m+r_n+r_q-r_{m,n}-r_{m,q}-r_{n,q}+r_{m,n,q}$$

ausgedrückt, worin die Bedeutung jedes einzelnen Gliedes in den früheren Paragraphen hinlänglich erläutert wurde. Im Uebrigen sind noch viele hieher gehörige Fälle und Modificationen denkbar, welche alle zu erörtern wir nicht für nothwendig erachten, weil schliesslich Alles darauf ankommt, die Wahrscheinlichkeit für jeden speciellen Fall zu bestimmen, was wir zu seiner Zeit zur Genüge gethan haben. Ausserdem verweisen wir auf die Werke von Francis Baily und David Jones (Hattendorff).

---

[1]) Siehe die Anmerkung bei §. 26.

Digitized by Google

3. Abtheilung.

Ueberlebungsrenten, Wittwen- und Waisen-Pensionen.

§. 35.

Erklärung.

Eine Ueberlebungsrente oder Anwartschaft ist eine solche, welche erst dann entweder temporär oder lebenslänglich an bezeichnete Personen ausbezahlt werden, wenn Eine oder Mehrere im Voraus bestimmte Personen mit Tod abgegangen sind. Erhält eine Ehefrau nach dem Tode ihres Mannes eine Leibrente, so ist dies eine Wittwenpension; erhalten Kinder nach dem Tode ihrer Eltern Leibrenten, so ist dies eine Waisenpension.

§. 36.

Die Wittwenpensionen.

Nach dem Tode einer $m$jährigen Person A erhält eine $n$jährige Person B eine Leibrente auf Lebensdauer. Es soll der baare Werth dieser Leibrente bestimmt werden.

Die Jahresrente sei 1 fl.; der am Ende des x^{ten} Jahres zahlbare Gulden ist gegenwärtig werth

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^x = \varrho^x .$$

Dass aber B in den Besitz desselben gelangt, hängt davon ab, dass A bis dahin gestorben ist, und B selbst noch lebt; die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right) \frac{a_{n+x}}{a_n} = \frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} .$$

Die Jahresrente für das x^{te} Jahr ist demnach für B werth

$$\varrho^x \left(\frac{a_{n+x}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right).$$

Digitized by Google

Die daraus für $x = 1, 2, 3 \ldots$ entstehende Summe ist der gesuchte Totalwerth, nämlich

$$S\left[\varrho^x \frac{a_{n+x}}{a_m} - \varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\right] = r_n - r_{m,n},$$

d. h. der baare Werth der Ueberlebungsrente ist gleich einer Leibrente für B weniger der Verbindungsrente für A und B. Ist A der Mann eines Ehepaars, so ist der gefundene Werth der einer Wittwenpension.

§. 37.

Einlage aus der Jahresrente.

Ein $m$jähriger Mann will seiner $n$jährigen Frau eine Wittwenpension von jährlich s fl. sichern. Gegen welche Einzahlung (k) kann er dieses erlangen?

Die Einlage für 1 fl. jährlich ist

$$r_n - r_{m,n};$$

daher für s fl.

$$k = s\,(r_n - r_{m,n}).$$

Beispiel. Mit welcher Summe kann ein 40jähriger Mann seiner 24jährigen Frau eine Wittwenpension von jährlich 500 fl. sichern? ($3\frac{1}{2}$ %.)

Nach der Tafel von Brune ist

$$\begin{aligned} r_n &= r_{24} &&= 18{,}6940 \\ r_{m,n} &= r_{40,24} &&= 13{,}2031 \\ \hline r_n - r_{m,n} &&&= 5{,}4909 \end{aligned}$$

daher

$$k = 500 \times 5{,}4909 = 2745{,}45 \text{ fl.}$$

§. 38.

Jahresrente aus der Einlage.

Die Jahresrente s, welche der Einlage k entspricht, ist allgemein ausgedrückt durch

$$s = \frac{k}{r_n - r_{m,n}}.$$

Digitized by Google

Beispiel. Welche jährliche Pension kann ein 40jähriger Mann seiner 24jährigen Frau sichern mit einer Summe von 2745 fl. 27 kr.?

Mit Benützung des vorigen Beispiels ist hier

$$s = \frac{2745{,}45}{5{,}4909} = 500 \text{ fl.}$$

§. 39.

Aufhörende Wittwenpensionen.

Soll die Wittwenpension nur x Jahre lang dauern, so sind in dem Ausdrucke

$$r_n - r_{m,\,n}$$

beide Theile dahin abzuändern, dass jeder eine temporäre Leibrente auf x Jahre vorstellt. Dieses ist nach §. 11 u. 24 ausgedrückt durch

$$r_n - {}_xr_n - (r_{m,\,n} - {}_xr_{m,\,n})$$

$$= r_n - \frac{a_{n+x}}{a_n}\,\varrho^x\, r_{n+x} - r_{m,\,n} + \frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}\,\varrho^x\, r_{m+x,\,n+x}$$

$$= r_n - r_{m,\,n} - \varrho^x\,\frac{a_{n+x}}{a_n}\left(r_{n+x} - \frac{a_{m+x}}{a_m}\,r_{m+x,\,n+x}\right).$$

Zwischen der Jahresrente s und der Einlage k besteht dann die Gleichung

$$k = S \times \left[r_n - r_{m,\,n} - \varrho^x\,\frac{a_{n+x}}{a_n}\left(r_{n+x} - \frac{a_{m+x}}{a_m}\,r_{m+x,\,n+x}\right)\right]$$ [1]).

Beispiel. Mit welcher Summe kann ein 40jähriger Mann seiner 24jährigen Frau eine Jahresrente von 500 fl. sichern, welche sie nach seinem Tode jedoch nur bis zu ihrem 34sten Lebensjahre erheben kann?

---

[1]) Dieser Fall ist nicht zu verwechseln mit jenem, worin die Frau x Jahre lang nach dem Tode ihres Mannes eine festgesetzte Pension bezieht, welcher Fall, wenn er in der Praxis vorkommen sollte, mehr mit der Theorie der Lebensversicherung als mit der der Leibrenten Gemeinschaft hat, wovon später.

Digitized by Google

Hier ist

$$\begin{aligned} a_{n+z} &= a_{34} = 7918 & r_{34} &= 17{,}2455 \\ a_n &= a_{24} = 8908 & r_{50,\,34} &= 10{,}8652 \\ a_{m+z} &= a_{50} = 6845 & & \\ a_m \times a_{40} &= 7943 & r_n - r_{m,\,n} &= 5{,}4909, \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} k &= 500\ [5{,}4909 - 0{,}7089 \times 0{,}8888 \times 7{,}883] \\ &= 500\ (5{,}4909 - 4{,}9668) = 262{,}05 \text{ fl.} \end{aligned}$$

§. 40.

Waisenpensionen. Pension für eine absolute Waise.

Zwei Eheleute A und B, im Alter m und n, schliessen mit einer Versorgungsanstalt zu Gunsten ihres $q$jährigen Kindes einen Contract dahin ab, dass demselben eine lebenslängliche Leibrente ausbezahlt werde, wenn beide nicht mehr am Leben sein werden. Mit welcher Summe kann diese Waisenpension gekauft werden?

Die Jahrespension sei wieder 1 fl.; dann ist der gegenwärtige Werth des nach x Jahren zahlbaren Guldens

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^x = \varrho^x;$$

die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind in den Besitz desselben tritt, hängt davon ab, dass die Eltern gestorben sind und das Kind selbst noch lebt, und ist demnach durch

$$\frac{a_{q+x}}{a_q}\left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right)$$

ausgedrückt. Das Product

$$\frac{a_{q+x}}{a_q}\left(1 - \frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}\right)\varrho^x$$

ist der gegenwärtige Werth desselben für das Kind. Die Summe aller einzelnen Jahrespensionen ist der Totalwerth der Pension, nämlich

Digitized by Google

$$S\left[\varrho^x \frac{a_{q+x}}{a_q}\left(1-\frac{a_{m+x}}{a_m}\right)\left(1-\frac{a_{n+x}}{a_n}\right)\right] = S\left[\frac{a_{q+x}}{a_q}\varrho^x - \frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q}\varrho^x - \frac{a_{n+x}}{a_n}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q}\varrho^x + \frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q}\varrho^x\right]$$
$$= r_q - r_{m,q} - r_{n,q} + r_{m,n,q},$$

nach der Bezeichnung der früheren Paragraphen.

§. 41.

Temporäre oder aufhörende Pension für absolute Waisen.

Soll die vorige Pension nur auf eine gewisse Zeit nach dem Tode der Eltern dem Kinde gezahlt werden, so unterscheiden wir 2 Fälle.

1. Fall. Das Kind geniesst die Pension nur x Jahre lang nach dem Tode der Eltern;
2. Fall. Das Kind geniesst die Pension nur bis zu seinem x^{ten} Lebensjahre.

Im ersten Falle, welcher übrigens in der Praxis nicht leicht vorkommen wird, steht die genaue Berechnung wegen ihrer Weitläufigkeit in gar keinem Verhältniss zur practischen Bedeutung. Wir betrachten desshalb den zweiten Fall allein.

Zweiter Fall. Die Pension auf Lebenszeit nämlich

$$r_q - r_{m,q} - r_{n,q} + r_{m,n,q}$$

wird dadurch in eine auf x Jahre lautende Pension verwandelt. dass wir jedes Glied in eine temporäre Rente verwandeln. Wir haben demnach

$$r_q - {}_x r_q = r_q - \frac{a_{q+x}}{a_q}\varrho^x r_{q+x} \text{ anstatt } r_q$$

$$r_{m,q} - {}_x r_{m,q} = r_{m,q} - \frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q}\varrho^x r_{m+x,q+x} \text{ anstatt } r_{m,q}$$

$$r_{n,q} - {}_x r_{n,q} = r_{n,q} - \frac{a_{n+x}}{a_n}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q}\varrho^x r_{n+x,p+x} \text{ anstatt } r_{n,q}$$

$$r_{m,n,q} - {}_x r_{m,n,q} = r_{m,n,q} - \frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n}\cdot\frac{a_{q+x}}{a_q} r_{m+x,n+x,q+x} \text{ anstatt } r_{m,n,q}$$

Digitized by Google

zu setzen, so dass der baare Werth der bis zum x^{ten} Lebensjahre des Kindes zahlbaren Rente ausgedrückt ist durch

$$r_q - {}_x r_q - (r_{m,\,q} - {}_x r_{m,\,q}) - (r_{n,\,q} - {}_x r_{n,\,q}) + r_{m,\,n,\,q} - {}_x r_{m,\,n,\,q}$$

$$= r_q - r_{m,\,q} - r_{n,\,q} + r_{m,\,n,\,q} - \frac{a_{q+x}}{a_q}\,\varrho^x \left(r_{q+x} - \frac{a_{m+x}}{a_m}\, r_{m+x,\,q+x} \right.$$

$$\left. - \frac{a_{n+x}}{a_n}\, r_{n+x,\,q+x} + \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\, r_{m+x,\,n+x,\,q+x} \right),$$

dessen Berechnung mittelst Sterblichkeitstafeln immer möglich ist. Weil aber in der Regel der Vater allein für seine Kinder sorgt, d. h. von seinem Tod allein die Pension des Kindes abhängig macht, so halten wir es nicht für nothwendig, für den vorigen Fall ein Zahlenbeispiel zu rechnen, sondern wenden uns sogleich zur Berechnung der Pension eines vaterlosen Kindes.

§. 42.

Pension für vaterlose Kinder.

Ein $m$jähriger Vater kauft seinem $n$jährigen Kinde eine Pension von jährlich 1 fl., welche dasselbe nach seinem Tode zu beziehen hat. Welches ist der baare Werth dieser Pension

1) auf Lebenszeit

2) bis zum $(n+x)^{\text{ten}}$ Lebensjahre des Kindes?

Zur Beantwortung dieser Frage haben wir nicht mehr nothwendig, als was bei Gelegenheit der Wittwenpensionen gesagt worden ist. Wie dort ist auch hier der baare Werth der Pension

1) auf Lebenszeit

$$S \left(\varrho^x \frac{a_{n+x}}{a_n} - \varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n} \right) = r_n - r_{m,\,n};$$

2) jener bis zum x^{ten} Lebensjahre des Kindes

$$r_n - {}_x r_n - (r_{m,\,n} - {}_x\, r_{m,\,n})$$

$$= r_n - r_{m,\,n} - \varrho^x \frac{a_{n+x}}{a_n} \left(r_{n+x} - \frac{a_{m+x}}{a_m} r_{m+x,\,n+x} \right).$$

Digitized by Google

Zur Berechnung dieser und ähnlicher Formeln reichen aber die nach Brune mitgetheilten Tabellen nicht mehr aus, wesshalb wir das Fehlende nach den von Deparcieux entworfenen ergänzen.

§. 43.

Leibrententafel für eine Person nach Deparcieux.

Gegenwärtiger Werth der einfachen Leibrenten nach den Sterblichkeitstafeln von Deparcieux.

Alter	Gestorbene	Lebende	Werth der Leibrente von 1 Thlr. 3½ %	Alter	Gestorbene	Lebende	Werth der Leibrente von 1 Thlr. 3½ %
0	—	10000	14,2979	25	56	5288	18,8086
1	2550	7450	18,8636	26	57	5231	18,6790
2	362	7088	19,5209	27	58	5173	18,5495
3	265	6823	19,9889	28	57	5116	18,4127
4	205	6618	20,3294	29	56	5060	18,2680
5	150	6468	20,5288	30	55	5005	18,1152
6	123	6345	20,6592	31	54	4951	17,9537
7	102	6243	20,7317	32	54	4897	17,7870
8	89	6154	20,7676	33	53	4844	17,6110
9	81	6073	20,7811	34	52	4792	17,4252
10	69	6004	20,7557	35	52	4740	17,2329
11	58	5946	20,6917	36	52	4688	17,0339
12	49	5897	20,5938	37	51	4637	16,8240
13	43	5854	20,4712	38	50	4587	16,6026
14	39	5815	20,3298	39	49	4538	16,3692
15	37	5778	20,1296	40	48	4490	16,1233
16	38	5740	20,0204	41	49	4441	15,8717
17	41	5699	19.8702	42	49	4392	15,6105
18	44	5655	19,7257	43	50	4342	15,3429
19	47	5608	19,5872	44	51	4291	15,0687
20	50	5558	19,4551	45	52	4239	14,7874
21	52	5506	19,3262	46	53	4186	14,4987
22	53	5453	19,1971	47	54	4132	14,2023
23	54	5399	19,0677	48	55	4077	13,8977
24	55	5344	18,9382	49	56	4021	13,5844

Digitized by Google

Alter	Gestorbene	Lebende	Werth der Leibrente von 1 Thlr. $3\frac{1}{2}$ %	Alter	Gestorbene	Lebende	Werth der Leibrente von 1 Thlr. $3\frac{1}{2}$ %
50	57	3964	13,2621	74	133	1616	5,3060
51	59	3905	12,9336	75	137	1479	5,0004
52	62	3843	12,6023	76	142	1337	4,7251
53	66	3777	12,2713	77	139	1198	4,4579
54	70	3707	11,9406	78	134	1064	4,1951
55	76	3631	11,6172	79	128	936	3,9356
56	81	3550	11,2981	80	124	812	3,6954
57	85	3465	10,9804	81	115	697	3,4558
58	88	3377	10,6609	82	107	590	3,2255
59	91	3286	10,3396	83	98	492	3,0033
60	95	3191	10,0201	84	88	404	2,7855
61	99	3092	9,7028	85	77	327	2,5619
62	102	2990	9,3850	86	66	261	2,3220
63	105	2885	9,0670	87	55	206	2,0450
64	107	2778	8,7458	88	47	159	1,7422
65	109	2669	8,4216	89	42	117	1,4504
66	110	2559	8,0910	90	37	80	1,1955
67	111	2448	7,7539	91	30	50	0,9798
68	112	2336	7,4101	92	22	28	0,8109
69	113	2223	7,0593	93	14	14	0,6785
70	114	2109	6,7013	94	8	6	0,6387
71	116	1993	6,3395	95	3	3	0,3221
72	119	1874	5,9780	96	2	1	
73	125	1749	5,6295	97	1		

§. 44.

Leibrententafel für zwei Personen nach Deparcieux.

Gegenwärtiger Werth der Verbindungsrenten für zwei Leben nach den Sterblichkeitstafeln von Deparcieux. 1 Thlr. $3\frac{1}{2}$ %.

Alter	0	1	2	3	4	5	6	7
15	11,580	15,287	15,837	16,238	16,540	16,732	16,871	16,963
16	11,509	15,194	15,740	16,140	16,441	16,632	16,771	16,864
17	11,443	15,105	15,648	16,045	16,347	16,537	16,675	16,768

Digitized by Google

Alter	0	1	2	3	4	5	6	7
18	11,378	15,021	15,560	15,956	16,254	16,446	16,583	16,675
19	11,317	14,939	15,478	15,870	16,168	16,358	16,497	16,590
20	11,259	14,863	15,398	15,791	16,086	16,276	16,413	16,509
21	11,203	14,789	15,322	15,712	16,009	16,196	16,335	16,429
22	11,147	14,716	15,245	15,634	15,929	16,118	16,255	16,350
23	11,091	14,642	15,168	15,556	15,849	16,037	16,176	16,269
24	11,035	14,567	15,092	15,477	15,770	15,957	16,095	16,191
25	10,979	14,492	15,015	15,399	15,690	15,877	16,014	16,110
26	10,922	14,418	14,938	15,320	15,611	15,796	15,934	16,029
27	10,867	14,344	14,861	15,241	15,531	15,718	15,853	15,949
28	10,807	14,265	14,779	15,157	15,444	15,631	15,767	15,862
29	10,742	14,180	14,690	15,066	15,352	15,536	15,674	15,770
30	10,673	14,088	14,596	14,968	15,253	15,437	15,573	15,669
31	10,599	13,989	14,493	14,863	15,146	15,330	15,464	15,560
32	10,522	13,887	14,386	14,754	15,035	15,217	15,352	15,447
33	10,438	13,778	14,273	14,637	14,916	15,097	15,231	15,325
34	10,350	13,659	14,151	14,512	14,788	14,968	15,101	15,195
35	10,257	13,537	14,022	14,381	14,655	14,833	14,965	15,059
36	10,161	13,408	13,890	14,244	14,516	14,692	14,823	14,917
37	10,058	13,272	13,747	14,098	14,367	14,542	14,672	14,764
38	9,948	13,126	13,595	13,942	14,207	14,380	14,509	14,601
39	9,831	12,970	13,433	13,775	14,037	14,209	14,336	14,427
40	9,705	12,803	13,260	13,598	13,856	14,024	14,151	14,241
41	9,576	12,632	13,082	13,415	13,670	13,836	13,960	14,050
42	9,441	12,453	12,895	13,222	13,474	13,638	13,760	13,849
43	9,302	12,268	12,703	13,024	13,271	13,433	13,554	13,642
44	9,158	12,076	12,505	12,820	13,063	13,222	13,341	13,427
45	9,009	11,879	12,298	12,609	12,848	13,003	13,121	13,206
46	8,856	11,674	12,086	12,390	12,626	12,778	12,893	12,977
47	8,697	11,464	11,866	12,165	12,394	12,545	12,658	12,740
48	8,532	11,245	11,639	11,931	12,156	12,303	12,415	12,495
49	8,362	11,019	11,404	11,689	11,908	12,052	12,161	12,241
50	8,185	10,784	11,159	11,437	11,652	11,792	11,899	11,976
51	8,004	10,542	10,909	11,179	11,389	11,526	11,629	11,706
52	7,819	10,299	10,654	10,918	11,122	11,255	11,357	11,430
53	7,634	10,053	10,400	10,655	10,854	10,984	11,083	11,155
54	7,448	9,806	10,143	10,393	10,584	10,711	10,807	10,878
55	7,266	9,563	9,891	10,133	10,321	10,444	10,538	10,606
56	7,086	9,324	9,641	9,877	10,060	10,180	10,270	10,338
57	6,906	9,068	9,393	9,621	9,798	9,915	10,004	10,068
58	6,723	8,844	9,142	9,362	9,533	9,647	9,733	9,797

Digitized by Google

Alter	0	1	2	3	4	5	6	7
59	6,539	8,599	8,888	9,101	9,267	9,375	9,460	9,522
60	6,355	8,355	8,633	8,840	9,001	9,106	9,186	9,247
61	6,172	8,111	8,380	8,579	8,735	8,837	8,915	8,973
62	5,988	7,867	8,125	8,318	8,467	8,566	8,641	8,697
63	5,802	7,621	7,870	8,054	8,198	8,293	8,366	8,421
64	5,614	7,371	7,611	7,788	7,925	8,016	8,087	8,140
65	5,423	7,118	7,346	7,517	7,649	7,736	7,803	7,854
66	5,229	6,859	7,076	7,238	7,366	7,449	7,512	7,561
67	5,028	6,593	6,800	6,954	7,074	7,154	7,215	7,261
68	4,822	6,320	6,517	6,662	6,776	6,851	6,910	6,953
69	4,611	6,040	6,235	6,362	6,470	6,541	6,595	6,637
70	4,393	5,752	5,926	6,055	6,156	6,222	6,274	6,312
71	4,171	5,458	5,621	5,742	5,836	5,899	5,947	5,984
72	3,949	5,163	5,315	5,428	5,516	5,574	5,619	5,653
73	3,732	4,877	5,019	5,123	5,206	5,259	5,301	5,333
74	3,530	4,612	4,743	4,840	4,916	4,966	5,006	5,035
75	3,339	4,359	4,482	4,572	4,643	4,689	4,725	4,753

Alter	8	9	10	11	12	13	14	15
15	17,030	17,078	17,094	17,080	17,040	16,978	16,900	16,810
16	16,928	16,979	16,997	16,984	16,943	16,883	16,807	16,720
17	16,835	16,883	16,903	16,892	16,851	16,792	16,718	16,632
18	16,743	16,793	16,812	16,802	16,766	16,706	16,633	16,549
19	16,657	16,707	16,728	16,718	16,682	16,626	16,553	16,470
20	16,576	16,627	16,648	16,640	16,603	16,550	16,480	16,397
21	16,498	16,549	16,571	16,563	16,529	16,474	16,406	16,327
22	16,417	16,471	16,494	16,487	16,453	16,401	16,332	16,255
23	16,338	16,391	16,405	16,410	16,378	16,326	16,259	16,182
24	16,258	16,312	16,336	16,332	16,302	16,251	16,186	16,111
25	16,180	16,233	16,258	16,255	16,224	16,176	16,113	16,038
26	16,099	16,154	16,179	16,176	16,148	16,096	16,038	15,966
27	16,019	16,074	16,101	16,098	16,071	16,025	15,963	15,893
28	15,932	15,988	16,016	16,008	15,987	15,942	15,884	15,813
29	15,839	15,895	15,923	15,924	15,899	15,853	15,795	15,728
30	15,740	15,795	15,823	15,824	15,800	15,758	15,700	15,633
31	15,631	15,688	15,716	15,717	15,694	15,653	15,598	15,532
32	15,517	15,575	15,604	15,606	15,583	15,543	15,489	15,426
33	15,396	15,453	15,484	15,487	15,465	15,425	15,372	15,310
34	15,266	15,322	15,353	15,358	15,337	15,299	15,246	15,186

Digitized by Google

Alter	8	9	10	11	12	13	14	15
35	15,129	15,186	15,217	15,222	15,203	15,166	15,115	15,055
36	14,987	15,043	15,075	15,080	15,061	15,024	14,977	14.918
37	14,834	14,892	14,922	14,928	14,910	14,876	14.829	14,772
38	14,671	14,728	14,759	14.766	14,749	14,715	14,669	14,614
39	14,497	14,553	14.585	14,592	14,576	14,543	14,498	14,444
40	14,310	14,367	14,398	14,406	14,391	14,359	14,315	14,263
41	14,118	14,174	14,206	14,213	14,200	14,169	14,126	14,075
42	13,916	13,972	14,004	14,013	13,999	13,970	13,928	13.879
43	13,708	13,764	13,796	13,805	13,792	13,763	13,723	13,675
44	13,493	13,548	13,581	13,589	13,578	13.551	13,511	13,464
45	13,271	13,325	13,357	13,367	13,355	13,330	13,292	13,246
46	13,041	13,095	13.127	13,136	13,127	13,101	13,065	13,021
47	12,803	12,857	12,888	12,899	12,888	12,865	12,829	12,787
48	12,557	12,609	12,641	12,651	12,642	12,619	12,585	12,543
49	12,301	12.353	12,384	12,395	12,387	12,364	12,331	12,291
50	12,037	12,087	12.118	12,129	12,122	12,100	12.068	12,029
51	11,764	11,816	11,845	11,856	11,849	11,829	11,798	11,761
52	11,489	11,538	11,569	11,580	11,573	11,553	11.524	11,488
53	11,211	11,260	11,290	11,302	11,296	11,276	11,248	11,213
54	10.934	10.981	11,011	11,022	11,018	10.999	10.971	10,938
55	10,661	10,707	10,736	10,748	10,743	10.728	10,700	10,667
56	10,390	10,436	10,465	10,476	10,473	10,456	10,432	10,400
57	10,121	10,165	10,194	10,205	10,201	10,187	10,162	10,133
58	9.847	9.891	9,919	9.931	9,928	9,913	9.891	9,861
59	9,572	9,613	9.642	9,653	9,651	9,638	9.615	9.588
60	9,295	9,338	9,364	9,377	9,374	9,362	9,341	9,313
61	9.020	9,061	9,088	9,100	9,099	9,086	9,067	9,041
62	8,743	8,783	8.810	8.822	8,820	8.810	8.790	8,766
63	8,464	8,503	8,530	8.542	8,542	8,531	8.514	8,489
64	8,182	8,219	8,245	8.258	8,258	8,248	8.231	8.209
65	7,895	7,932	7,956	7.967	7,970	7,961	7.945	7,924
66	7,601	7,637	7.661	7.673	7,673	7,666	7,651	7,632
67	7,299	7,333	7,357	7.369	7,370	7.363	7.350	7,331
68	6,989	7,022	7,045	7.058	7,059	7,053	7.040	7,023
69	6,672	6,703	6,725	6,737	6,740	6,734	6.722	6,706
70	6,346	6,376	6.396	6,409	6,411	6,407	6.396	6,380
71	6,014	6,043	6,063	6.074	6,077	6,074	6.064	6,049
72	5,682	5,708	5,728	5,739	5,741	5,739	5,730	5,717
73	5.359	5,385	5.403	5,414	5,417	5,414	5.407	5.395
74	5,060	5,083	5.101	5.111	5,115	5,113	5.105	5,095
75	4,776	4,799	4.815	4,825	4,828	4,827	4.821	4,810

Digitized by Google

Alter	16	17	18	19	20	21	22	23
16	16,629							
17	16,545	16,460						
18	16,463	16,381	16,302					
19	16,387	16,306	16,230	16,156				
20	16,314	16,236	16,161	16,091	16,024			
21	16,245	16.167	16,095	16,026	15,963	15,900		
22	16,176	16,099	16,027	15,961	15,898	15,839	15,778	
23	16,104	16,032	15,960	15,894	15,835	15,776	15,718	15,658
24	16,033	15,961	15,894	15,828	15,769	15,714	15,657	15,600
25	15,964	15,891	15,842	15,763	15,705	15,650	15,596	15,541
26	15,892	15,822	15,756	15,696	15,640	15,587	15,533	15,481
27	15,820	15,752	15,688	15,629	15,575	15,524	15,472	15,420
28	15,740	15,676	15,613	15,555	15,503	15,454	15,404	15,354
29	15,657	15,592	15,532	15,475	15,425	15,377	15,329	15,282
30	15,565	15,502	15,443	15,388	15,339	15,293	15,247	15,200
31	15,465	15,403	15,346	15,293	15,246	15,200	15,156	15,112
32	15,360	15,299	15,243	15,192	15,147	15,103	15,060	15,018
33	15,248	15,188	15,133	15,083	15,039	14,998	14,957	14,916
34	15,124	15,167	15,013	14,965	14,922	14,883	14,844	14,805
35	14,995	14,939	14,888	14,841	14,799	14,761	14,724	14,687
36	14,859	14,805	14,755	14,710	14,670	14,634	14,598	14,562
37	14,714	14,660	14,612	14,569	14,531	14,496	14,461	14,428
38	14,558	14,505	14,458	14,416	14,380	14,347	14,314	14,282
39	14,390	14,340	14,294	14,253	14,218	14,186	14,156	14,125
40	14,210	14,162	14,117	14,077	14,043	14,014	13,984	13,956
41	14,024	13,976	13,934	13,896	13,863	13,834	13,806	13,779
42	13,828	13,782	13,741	13,705	13,674	13,645	13,619	13,593
43	13,626	13,581	13,541	13,506	13,477	13,451	13,425	13,400
44	13,417	13,373	13,334	13,300	13,272	13,248	13,224	13,200
45	13,200	13,158	13,120	13,087	13,060	13,036	13,014	12,993
46	12,975	12,935	12,898	12,867	12,840	12,818	12,796	12,777
47	12,743	12,703	12,668	12,637	12,612	12,591	12,570	12,552
48	12,501	12,463	12,428	12,400	12,375	12,355	12,336	12,318
49	12,250	12,213	12,180	12,152	12,129	12,110	12,091	12,075
50	11,990	11,953	11,922	11,895	11,873	11,854	11,837	11,822
51	11,722	11,688	11,656	11,631	11,610	11,592	11,576	11,561
52	11,451	11,417	11,388	11,362	11,342	11,326	11,309	11,296
53	11,178	11,145	11,116	11,093	11,073	11,057	11,043	11,029
54	10,903	10,872	10,845	10,821	10,803	10,787	10,773	10,762
55	10,633	10,604	10,578	10,555	10,537	10,523	10,509	10,498
56	10,367	10,338	10,313	10,291	10,274	10,260	10,248	10,236

Digitized by Google

Alter	16	17	18	19	20	21	22	23
57	10,101	10,073	10,048	10,027	10,011	9,998	9,985	9,975
58	9,832	9,804	9,780	9,760	9,745	9,732	9,720	9,710
59	9,558	9,533	9,510	9,490	9,474	9,463	9,452	9,443
60	9,286	9,261	9,240	9,220	9,205	9,193	9,184	9,175
61	9,014	8,991	8,969	8,952	8,937	8,926	8,915	8,908
62	8,741	8,717	8,698	8,680	8,667	8,655	8,646	8,637
63	8,465	8,443	8,423	8,408	8,394	8,385	8,375	8,367
64	8,185	8,165	8,146	8,130	8,119	8,108	8,100	8,092
65	7,902	7,881	7,864	7,849	7,837	7,828	7,819	7,813
66	7,610	7,592	7,574	7,560	7,549	7,540	7,532	7,525
67	7,311	7,293	7,278	7,263	7,253	7,245	7,237	7,231
68	7,004	6,987	6,972	6,960	6,948	6,941	6,934	6,928
69	6,690	6,672	6,659	6,646	6,637	6,628	6,623	6,617
70	6,365	6,350	6,336	6,325	6,313	6,309	6,302	6,298
71	6,034	6,021	6,009	5,998	5,990	5,983	5,978	5,972
72	5,703	5,690	5,679	5,669	5,662	5,655	5,649	5,646
73	5,382	5,370	5,359	5,351	5,344	5,338	5,333	5,328

Alter	24	25	26	27	28	29	30	31
24	15,542							
25	15,485	15,428						
26	15,427	15,373	15,318					
27	15,369	15,316	15,264	15,212				
28	15,304	15,254	15,204	15,154	15,097			
29	15,232	15,184	15,137	15,089	15,034	14,973		
30	15,155	15,107	15,062	15,016	14,964	14,906	14,840	
31	15,068	15,024	14,979	14,936	14,886	14,831	14,768	14,696
32	14,976	14,937	14,892	14,850	14,803	14,750	14,689	14,621
33	14,876	14,836	14,796	14,757	14,711	14,661	14,603	14,538
34	14,766	14,728	14,691	14,653	14,611	14,562	14,507	14,444
35	14,650	14,614	14,579	14,544	14,503	14,458	14,404	14,344
36	14,528	14,494	14,460	14,427	14,389	14,346	14,296	14,238
37	14,395	14,363	14,332	14,300	14,265	14,224	14,176	14,122
38	14,251	14,220	14,192	14,163	14,129	14,090	14,045	13,994
39	14,095	14,067	14,040	14,010	13,982	13,945	13,903	13,854
40	13,927	13,901	13,875	13,851	13,822	13,788	13,748	13,702
41	13,754	13,728	13,704	13,682	13,655	13,623	13,586	13,543
42	13,569	13,547	13,524	13,503	13,478	13,449	13,415	13,374
43	13,378	13,356	13,337	13,318	13,294	13,267	13,235	13,197

Digitized by Google

Alter	24	25	26	27	28	29	30	31
44	13,179	13,159	13,141	13,124	13,102	13,077	13,047	13,012
45	12,972	12,954	12,937	12,922	12,903	12,879	12,852	12,819
46	12,758	12,740	12,725	12,711	12,694	12,674	12,647	12,617
47	12,535	12,519	12,504	12,492	12,477	12,457	12,435	12,406
48	12,301	12,288	12,275	12,263	12,249	12,233	12,211	12,186
49	12,059	12,046	12,036	12,026	12,013	11,997	11,978	11,954
50	11,807	11,795	11,785	11,777	11,766	11,752	11,734	11,712
51	11,548	11,537	11,527	11,520	11,512	11,499	11,483	11,463
52	11,284	11,274	11,266	11,259	11,251	11,241	11,227	11,208
53	11,018	11,009	11,002	10,997	10,989	10,979	10,968	10,952
54	10,750	10,742	10,736	10,732	10,726	10,717	10,706	10,692
55	10,488	10,480	10,474	10,471	10,466	10,459	10,448	10,435
56	10,228	10,221	10,215	10,213	10,208	10,202	10,189	10,181
57	9,966	9,960	9,956	9,953	9,950	9,945	9,937	9,927
58	9,702	9,696	9,693	9,692	9,688	9,684	9,677	9,661
59	9,435	9,429	9,426	9,425	9,423	9,419	9,413	9,406
60	9,168	9,162	9,159	9,158	9,158	9,155	9,149	9,142
61	8,901	8,896	8,893	8,893	8,892	8,890	8,886	8,879
62	8,632	8,628	8,625	8,625	8,624	8,622	8,620	8,612
63	8,360	8,357	8,355	8,356	8,355	8,354	8,350	8,347
64	8,086	8,081	8,081	8,081	8,082	8,080	8,078	8,074
65	7,807	7,803	7,807	7,803	7,803	7,802	7,800	7,797
66	7,521	7,517	7,515	7,515	7,517	7,516	7,516	7,512
67	7,226	7,223	7,221	7,222	7,221	7,223	7,222	7,219
68	6,924	6,920	6,920	6,920	6,921	6,919	6,920	6,918
69	6,612	6,610	6,609	6,610	6,611	6,610	6,609	6,608
70	6,293	6,290	6,290	6,291	6,292	6,292	6,291	6,288
71	5,968	5,966	5,964	5,966	5,967	5,967	5,966	5,965
72	5,642	5,639	5,638	5,639	5,640	5,640	5,640	5,639
73	5,325	5,323	5,322	5,323	5,323	5,324	5,324	5,323
74	5,030	5,028	5,027	5,028	5,029	5,029	5,029	5,029
75	4,751	4,748	4,748	4,749	4,750	4,750	4,750	4,749
76	4,499	4,497	4,496	4,497	4,498	4,498	4,498	4,497
77	4,253	4,251	4,251	4,251	4,253	4,253	4,253	4,252
78	4,010	4,009	4,008	4,009	4,009	4,011	4,010	4,010
79	3,770	3,768	3,769	3,769	3,770	3,769	3,771	3,770
80	3,547	3,545	3,545	3,546	3,547	3,547	3,547	3,547

Mittelst dieser Tabellen, welche allgemein (ohne Rücksicht auf Geschlecht) brauchbar sind, können die für Waisenpensionen abgeleiteten Formeln ohne alle Mühe berechnet werden.

Digitized by Google

§. 45.

Einlage aus der Jahrespension für ein vaterloses Kind.

Ein $m$jähriger Vater will seinem $n$jährigen Kinde eine Pension von jährlich s Thlr. sichern, welche von heute an mit dem x^{ten} Jahre unbedingt erlischt. Welche Einlage k hat der Vater zu machen?

Für 1 Thlr. Jahrespension beträgt die Einlage

$$r_n - {}_x r_n - (r_{m,\,n} - {}_x r_{m,\,n})$$

und folglich für jährlich s Thlr. Pension

$$k = s\,[r_n - {}_x r_n - (r_{m,\,n} - {}_x r_{m,\,n})].$$

Beispiel. Ein 40jähriger Mann will seinem 5jährigen Kinde bis zu dessen 25sten Lebensjahre eine Pension von jährlich 300 Thlr. sichern. Mit welcher Summe kann er diese Pension bei $3^1/_2\,\%$ Zinsen erlangen?

Nach den Tabellen von Deparcieux ist

$$r_n = r_5 = 20{,}5288 \text{ und aus } 5 + x = 25$$
$$x = 20;$$
$$r_{m,\,n} = r_{40,\,5} = 14{,}0249$$
$$r_{60,\,25} = 9{,}1625;$$

ferner ist

$${}_x r_n = {}_{20}r_5 = \varrho^{20}\,\frac{5288}{6468}\,r_{25} = 7{,}7280$$

$${}_x r_{m,\,n} = {}_{20}r_{40,\,5} = \varrho^{20}\,\frac{5288}{6468}\cdot\frac{3191}{4490}\,r_{60,\,25} = 2{,}6755$$

$$\log \varrho^{20} = 9{,}7011934 - 10 \qquad \log 3191 = 3{,}5039268$$
$$\log 5288 = 3{,}7232914 \qquad C\log 4490 = 6{,}3477537 - 10$$
$$C\log 6468 = 6{,}1892300 - 10 \qquad \log r_{60,\,25} = 0{,}9620140$$
$$\log r_{25} = \log 18{,}8086 = 1{,}2743564 \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\log {}_{20}r_5 = 0{,}8880712 \qquad \log {}_{20}r_{40,\,5} = 0{,}4274093$$
$${}_{20}r_5 = 7{,}7280 \qquad {}_{20}r_{40,\,5} = 2{,}6755$$

Es ist daher

$$k = 300\,(20{,}5288 - 7{,}7280 - 14{,}0249 + 2{,}6755)$$
$$= 300 \times 1{,}4514 = 435{,}42 \text{ Thlr.}$$

Digitized by Google

§. 46.

Die Jahrespension aus der Einlage.

Beispiel. Ein 40jähriger Mann zahlt an eine Versorgungsanstalt baare 435,42 fl. mit der Bestimmung, dass nach seinem Tode seinem 5jährigen Kinde so lange eine Jahrespension gezahlt werde, bis dasselbe das 25ste Lebensjahr erreicht hat. Welche Jahrespension hat das Kind zu erwarten? ($3^1/_2$ %.)

Mit Benützung des vorigen Beispiels haben wir aus der Gleichung

$$435{,}42 = s \times 1{,}4514$$

sogleich die Jahrespension

$$s = \frac{435{,}42}{1{,}4514} = 300 \text{ fl.}$$

§. 47.

Die Einzahlung durch Jahresbeiträge oder Prämien.

Ein $m$jähriger Vater A will seinem $n$jährigen Kinde B eine Pension von jährlich s fl. dadurch sichern, dass er jährlich, so lange er am Leben ist, eine gewisse Summe b an eine Versorgungsanstalt einzahlt. Welche Summe hat er jährlich zu entrichten?

Wir unterscheiden dabei zwei Fälle; der Contract lautet

1) auf Lebenszeit,
2) auf x Jahre.

I. Fall. Was A während seiner ganzen Lebenszeit einzahlt, ist eine Verbindungsrente für zwei Leben von jährlich b fl., welche Rente so viel betragen muss, als die mit k bezeichnete Einlage. Wir haben daher die Gleichung

$$k = b \times r_{m,\,n},$$

wenn die erste Prämie am Ende des ersten Jahres gezahlt wird; wird sie aber am Anfange gezahlt, besteht die Gleichung

$$k = b + b \times r_{m,\,n}$$

Digitized by Google

einerseits, anderseits ist

$$k = s \times (r_n - r_{m,\,n}),$$

so dass wir aus der Gleichung

(1) $$b + b \times r_{m,\,n} = s\,(r_n - r_{m,\,n})$$

die Prämie aus der Jahrespension und umgekehrt berechnen können.

II. Fall. Was A während x Jahre einzahlt, ist eine temporäre Verbindungsrente auf x Jahre von jährlich b fl. und nach §. 24 durch

$$k = b \times ({}_{x}r_{m,\,n} - {}_{x}r_{m,\,n}) = b\left(r_{m,\,n} - \frac{a_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+x}}{a_n}\varrho^{x}\, r_{m+x,\,n+x}\right)$$

ausgedrückt; oder wenn die erste Prämie schon am Anfange des ersten Jahres gezahlt wird durch

(2) $$k = b + b\,({}_{x}r_{m,\,n} - {}_{x}r_{m,\,n}).$$

Nun ist aber auch

$$k = s\,[r_n - {}_{x}r_n - ({}_{x}r_{m,\,n} - {}_{x}r_{m,\,n})],$$

so dass zwischen Jahresrente und Prämie die Gleichung

(3) $$b\,(1 + {}_{x}r_{m,\,n} - {}_{x}r_{m,\,n}) = s\,[r_n - {}_{x}r_n - ({}_{x}r_{m,\,n} - {}_{x}r_{m,\,n})]$$

besteht.

Beispiele. 1) Ein 50jähriger Vater wünscht seinem 12jährigen Kinde eine lebenslängliche Pension von jährlich 300 fl. zu sichern. Welche jährliche Prämie hat er zu leisten, wenn er sogleich mit der Einzahlung beginnt und sie fortsetzt, so lange Beide noch leben?

Aus Gleichung **(1)** ist allgemein

$$b = \frac{s\,(r_n - r_{m,\,n})}{1 + r_{m,\,n}}$$

Nun ist nach Deparcieux ($3\frac{1}{2}\,\%$)

$$r_n = r_{12} = 20{,}5938 \quad r_{m,\,n} = r_{50,\,12} = 12{,}122$$

folglich

$$b = \frac{300\,(20{,}5938 - 12{,}122)}{1 + 12{,}122} =$$

$$= \frac{2541{,}54}{13{,}122} = 193{,}68 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

2) Ein 40jähriger Vater sucht seinem 5jährigen Kinde eine bis zu dessen 25sten Lebensjahre zahlbare Pension von jährlich 300 fl. zu sichern und verpflichtet sich desshalb von heute bis zu jener Zeit Jahresbeiträge zu leisten. Welche Prämie hat er jährlich zu zahlen? ($3^1/_2$ %.)

Aus der Gleichung **(2)** ist

$$b = \frac{k}{1 + r_{m,\,n} - {}_x r_{m,\,n}}$$

worin nach dem Beispiele des §. 45 nach den Tabellen von Deparcieux

$$k = 435{,}42, \qquad r_{m,\,n} = r_{40,\,5} = 14{,}0249$$
$${}_x r_{m,\,n} = {}_{20}r_{40,\,5} = 2{,}6755$$

und folglich

$$b = \frac{435{,}42}{12{,}3494} = 35{,}17 \text{ fl.}$$

§. 48.

Theilweise Einzahlung durch Prämien.

Die Einzahlung durch Prämien kann noch dahin abgeändert werden, dass ein gewisser Theil k, der Totaleinlage k sogleich und das Uebrige durch Prämien abgetragen wird. Die Rechnung ändert sich in diesem Falle dahin ab, dass wir in den früheren Gleichungen k_1 anstatt der ersten Prämie b schreiben. Wir haben daher allgemein die Gleichungen

(1) $$k = k_1 + b\, r_{m,\,n} = s\,(r_n - r_{m,\,n})$$

(2) $$k = k_1 + b\,(r_{m,\,n} - {}_x r_{m,\,n}),$$

jenachdem die Pension des Kindes auf Lebenszeit oder nur auf x Jahre festgesetzt ist, woraus dann beziehungsweise folgt

(3) $$b = \frac{k - k_1}{r_{m,\,n}}$$

(4) $$b = \frac{k - k_1}{r_{m,\,n} - {}_x r_{m,\,n}}$$

Digitized by Google

Beispiele. 1) Ein 60jähriger Mann zahlt für sein 15jähriges Kind an eine Versorgungsanstalt sofort 300 fl. und, so lange er lebt, eine Prämie von jährlich 25 fl. Welche Jahrespension hat sein Kind zu erwarten? ($3\frac{1}{2}$ %.)

Aus Gleichung **(1)** folgt allgemein

$$s = \frac{k_1 + b\, r_{m,\,n}}{r_n - r_{m,\,n}},$$

worin zu setzen ist

$$\begin{aligned} k_1 &= 300, \quad r_n \;\; = r_{15} \;\; = 20{,}1296 \\ b &= \;\; 25, \quad r_{m,\,n} = r_{15,\,60} = \;\; 9{,}3139 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 10{,}8157, \end{aligned}$$

so dass

$$s = \frac{300 + 25 \times 9{,}3139}{10{,}8157}$$

$$= \frac{532{,}8475}{10{,}8157} = 49{,}26 \text{ fl.}$$

die gesuchte Jahrespension auf Lebenszeit ist.

2) Ein 45jähriger Vater könnte gegen die baare Einlage von 600 fl. seinem 9jährigen Kinde eine gewisse bis zu dessen 25sten Lebensjahre zahlbare Pension sichern. Der Vater hingegen will sogleich 300 fl. und das Uebrige durch jährliche Prämien tilgen. Welche Prämie hat er jährlich zu zahlen?

Nach der Gleichung **(4)** ist die Prämie allgemein durch

$$b = \frac{k - k_1}{r_{m,\,n} - x\, r_{m,\,n}}$$

ausgedrückt, worin zu setzen ist

$$\begin{aligned} k &= 600, \quad x \;\; = 16 \\ k_1 &= 300, \quad r_{m,\,n} = r_{45,\,9} = 13{,}325; \end{aligned}$$

ferner wird nach den Tafeln von Deparcieux

Digitized by Google

$$ {}_x r_{m,\,n} = {}_{16}r_{45,\,9} = \frac{a_{61}}{a_{45}} \cdot \frac{a_{25}}{a_9}\, \varrho^{16}\, r_{61,\,25} $$

$$ = \frac{3092}{4239} \cdot \frac{5288}{6073}\, \varrho^{16}\, 8{,}896 = \frac{3{,}2585 \text{ fl.}}{10{,}0665} $$

und folglich

$$ b = \frac{300}{10{,}0665}\, 29{,}80 \text{ fl.} = 29 \text{ fl. } 48 \text{ kr.} $$

der Werth der Prämie.

§. 49.

Die lebenslängliche Einzahlung in Wittwenkassen.

Die Erörterungen der letzten zwei Paragraphen gelten unverändert für Wittwenpensionen; ein Umstand tritt jedoch hier besonders hervor, auf welchen wir jetzt aufmerksam machen wollen. Es gibt gewisse Kategorien, die lebenslänglich in die sogenannte Wittwenkasse zu zahlen verpflichtet sind, ohne Rücksicht darauf, ob die Frau noch lebt oder ob sie überhaupt verheirathet sind. Die Frau zieht nach dem Tode ihres Mannes eine gewisse Pension auf Lebenszeit. Die Einzahlungen, welche Männer solcher Kategorien zu leisten haben, sind Prämien auf Lebenszeit und unabhängig von der Existenz der Frau, was die Rechnung nur vereinfacht. Ist der Mann gegenwärtig m Jahre, die Frau n Jahre alt, beträgt ferner die festgesetzte Jahrespension wie bisher

$$ s \text{ fl.,} $$

so ist der Totalwerth k durch

$$ k = s\,(r_n - r_{m,\,n}) $$

ausgedrückt, welcher durch lebenslängliche Prämien getilgt wird. Zahlt nun der Mann jährlich b fl., so ist der Totalwerth aller Prämien eine Leibrente auf Lebenszeit und durch

$$ b \times r_m $$

oder auch, wenn die Prämienzahlung sogleich beginnt, durch

$$ k \times b + b \times r_m $$

ausgedrückt. Wir haben demnach die Gleichung

(1) $$ b\,(1 + r_m) = s\,(r_n - r_{m,\,n}), $$

Digitized by Google

welche für alle hieher gehörigen Fragen ausreicht. Diese Gleichung lehrt, dass bei derlei Einzahlungen eine gegenseitige Billigkeit desswegen nicht herrschen kann, weil auch die Unverheiratheten einzahlen müssen; aber auch ausserdem würde noch Unbilligkeit stattfinden, wenn jeder ohne Rücksicht seines Alters die nämliche Prämie zu zahlen verpflichtet ist. Ist aber der Beitritt freiwillig, so kann nach der vorigen Gleichung die Prämie bestimmt und nach gegenseitiger Billigkeit verfahren werden.

4. Abtheilung.

Besondere Arten von Leibrenten.

§. 50.

Zunehmende Leibrenten.

Bisher wurde die Jahresrente für jedes Jahr gleich gross angenommen; es kann aber auch der Fall eintreten, dass die Jahresrente von Jahr zu Jahr ab- oder zunimmt. Um auch solche Fälle zu behandeln, nehmen wir an, eine Rente sei so beschaffen, dass am Ende eines jeden Jahres

$$s \text{ fl.}$$

und ausserdem noch

$$d,\ 2d,\ 3d\ \ldots\ (x-1)\,d$$

am Ende des 2ten, 3ten, 4ten .... Jahres ausbezahlt werden, so dass am Ende des x^{ten} Jahres die Summe

$$s + (x-1)\,d \text{ fl.}$$

zahlbar und gegenwärtig vermöge des Disconto auf x Jahre

$$[s + (x-1)\,d]\,\varrho^x \text{ fl.}$$

werth ist. Um die Rechnung für alle früheren Fälle einzurichten, heissen wir überhaupt

$$p_x$$

die Wahrscheinlichkeit, am Ende des x^{ten} Jahres in den Besitz dieser Summe zu gelangen. Dann ist das Product

$$p_x\,[s + (x-1)\,d]\,\varrho^x$$

Digitized by Google

der gegenwärtige Werth der am Ende des x^{ten} Jahres zahlbaren Jahresrente. Indem wir vermöge der Sterblichkeitstafeln für alle Fälle die entsprechende Wahrscheinlichkeit p bestimmen können, ist der vorige Ausdruck sowohl für Eine als mehrere Personen anwendbar. Indem wir ferner die einzelnen Jahresrenten bilden und in Summe bringen, ist jede hiehergehörige Aufgabe gelöst. Die einzelnen Jahresrenten erhalten wir dadurch, dass x alle Werthe von 1 bis zu der durch die Natur der Aufgabe festgesetzten Grenze annimmt. Zeigen wir diesen Vorgang mit dem Buchstaben S an, so lässt sich der Werth der fraglichen Rente durch die Reihe

$$\begin{aligned} & S\,[p_x\,(s+(x-1)\,d)\,\varrho^x] \\ = \;& p_1 s\varrho + p_2 s\varrho^2 + p_3 s\varrho^3 + \ldots \\ & + p_2 d\varrho^2 + p_3 2d\varrho^3 + p_4 3d\varrho^4 + \ldots \end{aligned}$$

oder auch durch

$$\begin{aligned} & S\,[p_x\,(s+(x-1)\,d)\,\varrho^x] \\ = \;& s\,(p_1\varrho + p_2\varrho^2 + p_3\varrho^3 + \ldots) \\ & + d\,(p_2\varrho^2 + 2p_3\varrho^3 + 3p_4\varrho^4 + \ldots) \end{aligned}$$

darstellen. Die erstere Reihe ist eine in früheren Beispielen berechnete Rente; die letztere hingegen ist bisher noch nicht vorgekommen und lässt sich nicht anders als Gliedweise berechnen, was immer, wenn auch mühsam, ausgeführt werden kann.

Beispiel. Welches ist der gegenwärtige Werth einer nach 5 Jahren aufhörenden Leibrente für einen 40jährigen Mann, welche mit 400 fl. beginnt und jährlich um 10 fl. zunimmt?

Nehmen wir die Tafel von Brune und 4 % Zinsen, so ist

$$s = 400,\ d = 10 \text{ und } \varrho = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}96153$$

$$p_x = \frac{a_{m+x}}{a_m},$$

und wir haben

Digitized by Google

$$S\left[\frac{a_{m+x}}{a_m}s\,.\,\varrho^x+\frac{a_{m+x}}{a_m}(x-1)\,d\,\varrho^x\right]$$

$$=\frac{s}{a_m}(a_{m+1}\varrho+a_{m+2}\varrho^2+--+a_{m+5}\varrho^5)$$

$$+\frac{d}{a_m}(a_{m+2}\varrho^2+2a_{m+3}\varrho^3+3a_{m+4}\varrho^4+4a_{m+5}\varrho^5);$$

der erstere Ausdruck ist eine temporäre Leibrente auf 5 Jahre

$$= s\,(r_{40}-{}_5r_{40})$$

$$= 400\,(14{,}4068-\frac{7440}{7943}\varrho^5\,13{,}1409)$$

$$= 400\,(14{,}4068-10{,}1168)$$

$$= 400\times 4{,}29 = 1716 \text{ fl.};$$

für die zweite Reihe ist der in Klammer stehende Ausdruck

$a_{42}\varrho^2$	$= 7749\times 0{,}92455$	$= 7160{,}7$
$2\,.\,a_{43}\varrho^3$	$= 2\,.\,7649\times 0{,}88899$	$= 13599{,}8$
$3\,.\,a_{44}\varrho^4$	$= 3\,.\,7546\times 0{,}85480$	$= 19350{,}9$
$4\,.\,a_{45}\varrho^5$	$= 4\,.\,7440\times 0{,}82192$	$= 24460{,}4$
		$64571{,}8$

und der ganze Ausdruck

$$=\frac{10\times 64571{,}8}{7943}=81{,}29 \text{ fl.}$$

Der Gesammtwerth der Rente beträgt demnach

$$1716+81{,}29 = 1797{,}29 \text{ fl.}$$
$$= 1797 \text{ fl. } 18 \text{ kr.}$$

§. 51.

Abnehmende Leibrenten.

Nimmt eine Rente unter denselben Umständen wie vorhin jährlich um d fl. ab, anstatt zu, so haben wir den mit d behafteten Ausdruck in dem Resultate des vorigen Paragraphen abzuziehen; alles Uebrige bleibt ungeändert.

Digitized by Google

Wir können daher als allgemeinen Ausdruck einer solchen Rente schreiben

$$S\,[p_x\,(s-(x-1)\,d)\,\varrho^x]$$
$$= s\,(p_1\varrho + p_2\varrho^2 + p_3\varrho^3 + \ldots.)$$
$$- d\,(p_2\varrho^2 + 2p_3\varrho^3 + 3p_4\varrho^4 + \ldots.).$$

Beispiel. Welches ist der gegenwärtige Werth einer nach 5 Jahren aufhörenden Leibrente für einen 40jährigen Mann, welche mit 400 fl. beginnt und jährlich um 10 fl. vermindert wird?

Mit Benützung des vorigen Beispiels ist der erste Theil des allgemeinen Ausdrucks

1716

und der zweite 81,29;

daher der gesuchte Werth der Rente

$$1716 - 81{,}29 = 1634{,}71 \text{ fl.}$$

§. 52.

Leibrenten, welche periodenweise zu- oder abnehmen.

Nehmen wir an, am Ende eines jeden Jahres betrage die Rente wie bisher s fl., und steige alle x Jahre um die Grösse

d fl.,

so beträgt die Rente jährlich

s fl. in den ersten x Jahren
$s + d$ „ „ zweiten x „
$s + 2d$ „ „ dritten x „

u. s. w.

Um den gegenwärtigen baaren Werth der Leibrente zu finden, betrachten wir sie ohne Zuwachs, und jeden Zuwachs als eine für sich selbstständige aufgeschobene Leibrente von jährlich d fl. Der baare Werth einer Leibrente von jährlich s fl. beträgt

$$s\,r_{m,n}\ldots;$$

Digitized by Google

eine um x Jahre aufgeschobene Leibrente von jährlich d fl. beträgt

$$d\ {}_x r_{m+x,\ n+x} \cdots = \varrho^x \frac{a_{m+x}\ a_{n+x} \cdots}{a_m\ a_n \cdots} \cdot d \times r_{m+x,\ (n+x)}, \cdots$$

desgleichen bezeichnen noch die übrigen Perioden

$${}_{2x} r_{m+2x,\ n+2x} \cdots = \varrho^{2x} \frac{a_{m+2x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+2x}}{a_n} \cdots \times d\, r_{m+2x,\ n+2x}, \cdots$$

$${}_{3x} r_{m+3x,\ n+3x} \cdots = \varrho^{3x} \frac{a_{m+3x}}{a_m} \cdot \frac{a_{n+3x}}{a_n} \cdots \times d\, r_{m+3x,\ n+3x}, \cdots$$

u. s. w., den gegenwärtigen Werth einer um $2x$, und $3x$.... Jahre aufgeschobenen Leibrente von jährlich d fl. Die Summe aus diesen einzelnen Leibrenten ist der fragliche Totalwerth. Für Eine Person, gegenwärtig m Jahre alt, erhalten wir demnach

(1) $$s\, r_m + d\, [{}_x r_{m+x} + {}_{2x} r_{m+2x} + {}_{3x} r_{m+3x} + \ldots.]$$

und für zwei Personen des Alters m und n ist der baare Werth

(2) $$s\, r_{m,\ n} + d\, [{}_x r_{m+x,\ n+x} + {}_{2x} r_{m+2x,\ n+2x} + {}_{3x} r_{m+3x,\ n+3x} + \ldots.].$$

Wären die Perioden ungleich, so liessen sich die vorstehenden Ausdrücke leicht darnach einrichten. Für abnehmende Renten endlich haben wir den mit d behafteten Ausdruck abzuziehen, anstatt zu addiren.

Beispiel. Was ist für einen 56jährigen Mann eine Leibrente von jährlich 600 fl. gegenwärtig werth, wenn dieselbe alle 10 Jahre um 200 fl. steigt?

Nach Deparcieux und $3\frac{1}{2}\,\%$ Zinsen ist

$$r_{56} = 11{,}2981, \quad a_{56} = 3550$$
$$r_{66} = 8{,}0910, \quad a_{66} = 2559$$
$$r_{76} = 4{,}7251, \quad a_{76} = 1337$$
$$r_{86} = 2{,}3220, \quad a_{86} = 261$$

Digitized by Google

und mit Rücksicht auf **(1)**

$$s\,r_m = 600 \times 11{,}2981 = 6778{,}86$$

$$d_{\,10}r_{66} = 200\,\varrho^{10}\frac{2559}{3550} \times\ 8{,}091 = 788{,}03$$

$$d_{\,20}r_{76} = 200\,\varrho^{20}\frac{1337}{3550} \times\ 4{,}7251 = 162{,}80$$

$$d_{\,30}r_{86} = 200\,\varrho^{30}\frac{261}{3550} \times\ 2{,}322 = 10{,}52$$

$$7740{,}21$$

der baare Werth ist also

$$7740{,}21 \text{ fl.} = 7740 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

§. 53.

Die Rentenerhöhung aus der Einlage und der anfänglichen Jahresrente.

Es gibt Fälle, wie wir später bei den Rentengesellschaften sehen werden, wo die ursprüngliche Jahresrente s gegen die Einlage k in der Absicht zu niedrig bezahlt wird, um mit der Zunahme des Alters gleichzeitig eine Steigerung der Jahresrente gewähren zu können.

Nehmen wir nun an, eine $m$jährige Person beziehe gegen die Einlage k anfänglich eine Jahresrente von s fl., welche alle x Jahre um d fl. gesteigert wird. Wie gross wird d sein?

Mit Rücksicht auf den vorigen Paragraphen haben wir sogleich aus der Gleichung

$$k = s \times r_m + d\,[{}_xr_{m+x} + {}_{2x}r_{m+2x} + {}_{3x}r_{m+3x} + \ldots.]$$

die Zunahme der Jahresrente

$$d = \frac{k - s \times r_m}{[{}_xr_{m+x} + {}_{2x}r_{m+2x+3x}r_{m+3x} + \ldots.]}.$$

Beispiel. Welche Zunahme der Jahresrente kann einem 56jährigen Mann alle 10 Jahre gewährt werden, wenn er 7740 fl. 12 kr. baar einzahlt und anfänglich 600 fl. jährlich bezieht?

Digitized by Google

Mit Rücksicht auf das vorige Beispiel ist

$$k - s \times r_m = 7740{,}21 - 6778{,}86 = 961{,}35$$

$$\begin{aligned} {}_x r_{m+x} &= {}_{10}r_{66} = 3{,}94015 \\ {}_{2x} r_{m+2x} &= {}_{20}r_{76} = 0{,}81400 \\ {}_{3x} r_{m+3x} &= {}_{30}r_{86} = 0{,}0526 \\ &\qquad\qquad\quad 4{,}80675 \end{aligned}$$

folglich

$$d = \frac{961{,}35}{4{,}80675} = 200 \text{ fl.}$$

Es ist übrigens nicht gut, für die späteren Lebensjahre auf hohe Jahresrenten bedacht zu sein und dieses auf Unkosten des vorausgehenden Genusses. Einerseits zeigt die Wahrscheinlichkeits-Rechnung, dass es weit weniger vortheilhaft ist, auf die Chancen von der geringsten Wahrscheinlichkeit die höchsten Summen, als vielmehr die Summen proportional der Grösse der Wahrscheinlichkeit zu setzen; andrerseits findet man bei ruhiger Anschauung Gründe genug, welche davon abmahnen und vielmehr auffordern, lieber das Sichere zu wählen.

§. 54.

Leibrenten mit Rückvergütung.

Manche Anstalten gehen auch auf den besonderen Fall ein, dass sie im Todesfalle an die Erben des Rentenbeziehers den Ueberschuss der baaren Einlage über die schon gezogenen Renten zurückzahlen, wenn ein solcher noch vorhanden ist. Hat z. B. ein Rentenbezieher mit der Einlage k eine Jahresrente s erworben und stirbt schon nach 3 Jahren, so beträgt der Ueberschuss

$$k - 3s,$$

welcher nunmehr den Erben anheimfällt.

Dieser Rückfall an die Erben muss aber mit einer besonderen Einlage erworben werden. Ziehen wir eine $m$jährige

Digitized by Google

Person in Betracht, so besteht nach §. 7 zwischen der Einlage k und der Jahresrente s die Gleichung

$$k = s \times r_m ;$$

der Rückfall ändert sich jährlich und beträgt beziehungsweise

$$k,\ k-s,\ k-2s \ldots .\ k-ns.$$

Um zu sehen, auf wie viele Jahre die Rückfälle sich erstrecken, haben wir aus

$$k-ns = 0$$

die Anzahl derselben

$$\textbf{(1)} \qquad n = \frac{k}{s} .$$

Um nun den gegenwärtigen Werth jedes dieser Rückfälle zu berechnen, haben wir unter der Annahme, dass jeder Rückfall am Ende des Jahres ausbezahlt wird, die beziehungsweise auf die Gegenwart discontirten Werthe

$$k\varrho,\ (k-s)\varrho^2,\ (k-2s)\varrho^3 \ldots .\ (k-ns)\varrho^{n+1}$$

mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{g_m}{a_m},\ \frac{g_{m+1}}{a_m},\ \frac{g_{m+2}}{a_m} \ldots .\ \frac{g_{m+n}}{a_m}$$

beziehungsweise im 1. 2. .... n^{ten} Jahre zu sterben, zu multipliciren und zu summiren.

Bezeichnen wir den fraglichen Werth mit

$$R,$$

so haben wir als Ausdruck desselben

$$\textbf{(2)} \qquad R = k\varrho \frac{g_m}{a_m} + (k-s)\varrho^2 \frac{g_{m+1}}{a_m} + (k-2s)\varrho^3 \frac{g_{m+2}}{a_m}$$

$$+ \ldots . + (k-ns) \frac{g_{m+n}}{a_m} .$$

Die weitere Ausführung dieser Summe gewährt keine weitere Vereinfachung, so dass nichts anders übrig bleibt, als eine gliedweise Summirung, was aber keine besondere Beschwerlichkeit darbietet, weil die Anzahl der Glieder nicht gross ausfällt.

Fügen wir diesen Werth zur Einlage k, so beträgt die Einlage für eine Leibrente mit Rückvergütung

$$\textbf{(3)} \qquad K = k + R = R + s \times r_m .$$

Digitized by Google

Beispiel. Nach der Tabelle von Deparcieux kann sich eine 60jährige Person mit einer Einlage von 1002 fl. und $3\frac{1}{2}$ % Zinsen eine Leibrente von jährlich 100 fl. erwerben. Welches ist die Einlage K für dieselbe Leibrente, wenn die Anstalt Rückvergütung gewährt?

Wir haben in diesem Falle

$$k = 1002;\ s = 100;\ \varrho = \frac{1}{1{,}035} = 0{,}96618;$$

und die Anzahl der möglichen Rückvergütungen

$$n = \frac{1002}{100} = 10{,}02$$

und ohne Berücksichtigung des Bruches

$$n = 10.$$

Entnehmen wir nun der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux die Werthe

$$a_m = 3191;\ g_m = 99;\ g_{m+1} = 102 \text{ etc.},$$

so haben wir mit Rücksicht auf Gleichung **(2)**

$$k\varrho\ \frac{g_m}{a_m} = \varrho \,.\, 1002 \times 0{,}0310 = 30{,}0114$$

$$(k-s)\ \varrho^2\ \frac{g_{m+1}}{a_m} = \varrho^2 \,.\, 902 \times 0{,}0319 = 26{,}8606$$

$$(k-2s)\,\varrho^3\ \frac{g_{m+2}}{a_m} = \varrho^3 \,.\, 802 \times 0{,}0329 = 23{,}7973$$

$$(k-3s)\,\varrho^4\ \frac{g_{m+3}}{a_m} = \varrho^4 \,.\, 702 \times 0{,}0335 = 20{,}4936$$

$$(k-4s)\,\varrho^5\ \frac{g_{m+4}}{a_m} = \varrho^5 \,.\, 602 \times 0{,}0341 = 17{,}2841$$

$$(k-5s)\,\varrho^6\ \frac{g_{m+5}}{a_m} = \varrho^6 \,.\, 502 \times 0{,}0344 = 14{,}0481$$

$$(k-6s)\,\varrho^7\ \frac{g_{m+6}}{a_m} = \varrho^7 \,.\, 402 \times 0{,}0347 = 10{,}9608$$

$$(k-7s)\,\varrho^8\ \frac{g_{m+7}}{a_m} = \varrho^8 \,.\, 302 \times 0{,}0353 = 8{,}0956$$

$$(k-8s)\,\varrho^9\ \frac{g_{m+8}}{a_m} = \varrho^9 \,.\, 202 \times 0{,}0356 = 5{,}2764$$

$$(k-9s)\,\varrho^{10}\ \frac{g_{m+9}}{a_m} = \varrho^{10} \,.\, 102 \times 0{,}0359 = 2{,}5958$$

$$159{,}4237$$

Digitized by Google

Es beträgt demnach

$$R = 159 \text{ fl. } 25 \text{ kr.},$$

und somit die Gesammteinlage

$$K = 1002 + 159{,}42$$
$$= 1161 \text{ fl. } 25 \text{ kr.}$$

Für mehr als Eine Person ändert sich die Rechnung dahin ab, dass das Product aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten jeder einzelnen Person zu setzen ist.

Die in unserm Beispiele berechnete Differenz

$$K - k = 159 \text{ fl. } 25 \text{ kr.}$$

beträgt nach den Tabellen der Stuttgarter Renten-Anstalt nahezu

200 fl.,

also beinahe 40 fl. mehr als die Rechnung zeigt. Zu weiteren Vergleichen theilen wir folgende Tabelle der genannten Anstalt mit.

Alter beim Eintritt	Für eine Leibrente von jährlich 5 fl. beträgt die Einlage			
	ohne Rückvergütung		mit Rückvergütung	
	fl.	kr.	fl.	kr.
0	86	—	106	11
10	99	15	103	27
20	92	50	98	34
25	89	36	95	48
30	86	8	92	41
35	82	16	89	11
40	77	55	85	15
45	73	—	80	56
50	67	32	76	17
55	61	46	71	19
60	55	54	65	52
65	49	47	59	39
70	43	—	52	28

Digitized by Google

§. 55.

Aufgeschobene Leibrenten mit Rückvergütung.

Die jährliche Prämie b, wodurch eine auf x Jahre aufgeschobene Leibrente von jährlich s fl. erworben werden kann, haben wir schon §. 14 berechnet. Es kann sich auch ereignen, dass der Rentenbesitzer früher stirbt als die erste Jahresrente fällig wird; will er in diesem Falle die bis dahin gezahlten Prämien seinen Erben sichern, so kann er mit der Versicherungsbank einen zweiten Vertrag abschliessen, dass im Todesfalle die geleisteten Prämien seinen Erben zu Gute kommen Um die Einlage für diese Versicherung zu berechnen, haben wir die einzelnen Rückfälle

$$b,\ 2b,\ 3b\ \ldots\ xb$$

auf die Gegenwart zu discontiren, mit der Sterbenswahrscheinlichkeit des vorigen Paragraphen zu multipliciren und die einzelnen Glieder zu summiren. Bezeichnen wir den fraglichen Werth mit R, so haben wir

$$\textbf{(1)}\qquad R = b\varrho\frac{g_m}{a_m} + 2b\varrho^2\frac{g_{m+1}}{a_m} + 3b\varrho^3\frac{g_{m+2}}{a_m} + \ldots + nb\varrho^n\frac{g_{m+n-1}}{a_m},$$

welcher Ausdruck sich nicht weiter vereinfachen lässt.

Die Berechnung in einem Zahlenbeispiel gestaltet sich genau nach dem Beispiele des vorigen Paragraphen. Kommen mehr als Eine Person in Betracht, so ändert sich nur die Sterbenswahrscheinlichkeit, deren Bestimmung in früheren Beispielen zur Genüge behandelt wurde.

Fügen wir diesen Betrag zu jenem der aufgeschobenen Leibrente und bezeichnen den Gesammtwerth mit K, so ist derselbe durch

$$\textbf{(2)}\qquad K = R + {}_xr_m$$

dargestellt.

Digitized by Google

§. 56.

Die Gegenversicherung.

Anstatt den Ueberschuss der Einlage über die schon gezogenen Renten oder die Prämien bei aufgeschobenen Leibrenten den Erben im Todesfalle zu sichern, kann der Rentenbesitzer auch eine bestimmte Summe festsetzen. In diesem Falle heisst die Versicherung Gegenversicherung und ist hinsichtlich der Berechnung nichts anderes als eine Lebensversicherung entweder auf Lebenszeit oder auf kurze Dauer, jenachdem der Zeitpunct des Rückfalls auf den Todesfall des Rentenbeziehers oder auf einen bestimmten Zeitraum festgesetzt ist. (Siehe die Berechnung der Lebensversicherungen.)

§. 57.

Die Kapitalversicherung.

Mit der Gegenversicherung hat die Kapitalversicherung viel Aehnlichkeit und kann auch in einzelnen Fällen damit verwechselt werden. Die Kapitalversicherung ist ein Vertrag mit einer Versicherungsbank, worin sich letztere verbindlich macht, eine bestimmte Summe k zu einer bestimmten Zeit an eine zum Voraus bezeichnete Person auszubezahlen. Versicherer und Versicherter kann dieselbe Person sein oder auch nicht. Der Versicherer braucht nicht selbst versichert zu sein, wie bei der Gegenversicherung. Das Wesentliche ist hier, dass der Empfänger am Leben bleibt, gleichgiltig, ob der Versicherer noch am Leben ist oder nicht; wäre k vom Leben oder Tode des Versicherers für eine zweite Person B abhängig, so wäre der Vertrag eine Lebensversicherung, was hier unter Kapitalversicherung nicht verstanden werden soll. (Was die Berechnung betrifft, siehe Sparkassentontine.)

Digitized by Google

II. Abschnitt.

Die Lebensversicherungs-Anstalten.

§. 58.

Einleitung.

Die Lebensversicherung ist ein Vertrag, vermöge dessen die Bank der Versicherungs-Anstalt gegen eine gewisse jährliche oder einmalige Einzahlung die Verpflichtung übernimmt, nach eingetretenem Tode des Versicherten ein bestimmtes Kapital auszubezahlen.

Der Versicherte heisst derjenige, von dessen Tod die Auszahlung abhängt; Prämie heisst die jährliche Einzahlung; Police die von der Anstalt über die zu empfangende Versicherungssumme ausgestellte Urkunde. Während bei Leibrenten die contrahirte Summe von der Existenz der Person abhängig ist und jährlich ausbezahlt wird, ist dieselbe bei Lebensversicherungen erst nach erfolgtem Tode und nur Einmal fällig.

Jede Versicherungs-Anstalt hat ihre besondern Statuten und Tarife der Prämien; auch ist die Aufnahme in der Regel nur auf solche Personen beschränkt, welche ein gewisses Alter nicht überschritten haben, gewissen Kategorien nicht angehören und nach ärztlichem Befunde von tadelloser Gesundheit sind u. s. w.[1]) Durch diese Beschränkung der Aufnahme sind auch strenge genommen allgemeine Sterblichkeitstafeln nicht mehr brauchbar. Da, wo sie benützt werden, ist der Vortheil auf Seiten der Bank. Vergleicht man noch insbesondere die Tarife der Bank mit dem Ergebniss der Berechnung nach Sterblichkeitstafeln, so sind sie trotzdem noch höher als die berechneten, was bis zu einer gewissen Höhe allerdings durch

[1]) In manchen Lebensversicherungs-Anstalten wird auch hievon, jedoch nur gegen höhere Prämien, Umgang genommen.

Digitized by Google

die Verwaltungskosten der Bank gerechtfertigt erscheint. Man vergleiche die beigefügten Geschäftsergebnisse und den Zustand der deutschen Lebensversicherungsgesellschaften.

1. Abtheilung.

Versicherung Eines Lebens.

§. 59.

I.

Versicherung auf Lebenszeit.

Eine Person A, gegenwärtig m Jahre alt, lässt ihr Leben auf eine gewisse Summe versichern, welche nach ihrem Tode zahlbar ist. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Summe, oder mit welcher Einlage kann das versicherte Kapital erworben werden?

Der Einfachheit wegen nehmen wir

100 fl. als Einheit des Versicherungskapitals

und setzen als Zahlungstermin das Ende des Sterbejahres fest. Da nun in jedem Jahr innerhalb der Lebensgrenze der Tod erfolgen kann, so ist der gegenwärtige baare Werth des Versicherungskapitals auf alle diese einzelnen Jahre vertheilt; oder mit andern Worten, er besteht aus ebensovielen Partialwerthen, als die Versicherungszeit Jahre umfasst.

Betrachten wir den dem x^{ten} Jahre entsprechenden Partialwerth, so erhalten wir ihn dadurch, dass wir den Tod gerade im x^{ten} Jahre eintreten lassen. Setzen wir wie bisher

$z =$ Zins von 1 fl.

$$\frac{1}{1+z} = \varrho = \text{den auf ein Jahr discontirten Werth von 1 fl.;}$$

so sind die am Ende des x^{ten} Jahres zahlbaren 100 fl. gegenwärtig werth

$$\frac{100}{(1+z)^x} = 100 + \varrho^x,$$

Digitized by Google

die Wahrscheinlichkeit, dass A in diesem Jahre sterben wird, ist

$$p_x = \frac{g_{m+x}}{a_m} = \frac{a_{m+x-1} - a_{m+x}}{a_m};$$ [1])

das Product aus beiden

$$100\,\varrho^x \frac{g_{m+x}}{a_m}$$

ist der Partialwerth des x^{ten} Jahres auf die Gegenwart bezogen.

Aus diesem Partialwerthe lassen sich alle andern bilden und somit auch alle hiehergehörigen Rechnungen ausführen, indem x alle Werthe innerhalb der Versicherungszeit erhält. Zeigen wir dies mit dem Buchstaben S an, so ist der gegenwärtige Werth eines Versicherungskapitals von 100 fl. dargestellt durch

$$\textbf{(1)}\quad S\left[100\,\varrho^x \frac{g_{m+x}}{a_m}\right] = \frac{100}{a_m}[g_{m+1}\varrho + g_{m+2}\varrho^2 + g_{m+3}\varrho^3 + \ldots],$$

welche Reihe sich in jedem vorgelegten Falle mit Hilfe einer Sterblichkeitstafel berechnen lässt[2]). Indess lässt sich diese

---

[1]) Vergl. **Dr. Alb. Wild**, Probleme der Statistik etc., §. 30; und Die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung etc.

[2]) Ein näherungsweises Resultat erhält man auf einfache Weise dadurch, dass man von der wahrscheinlichen Lebensdauer Gebrauch macht.

Bezeichnen wir mit

t die wahrscheinliche Lebensdauer,
s die versicherte Summe,
y den gegenwärtigen Werth,

so haben wir, wenn s auf t Jahre discontirt wird, die Gleichung

$$y = s\,\varrho^t.$$

Diese Formel gibt den wahren Werth um so genauer, als die betrachtete Person in hohem Alter steht. So findet sich nach Brune für einen 50jährigen Mann ($3\frac{1}{2}\%$ Zinsen), wenn wir

$$s = 100 \text{ fl. nehmen}$$
$$y = 100\ (0{,}9661836)^{18{,}69} = 52{,}573,$$

während der wahre Werth 54,907 beträgt.

Selbstverständlich kann ein solches Verfahren da nicht angewendet werden, wo eine exacte Rechnung verlangt werden muss. Es

Digitized by Google

Reihe, wenn man im Besitze einer Leibrententafel ist, auch durch Leibrenten ausdrücken, was die Rechnung sehr erleichtert, da nämlich

$$\frac{g_{m+x}}{a_m} = \frac{a_{m+x-1} - a_{m+x}}{a_m}$$

ist, so verwandelt sich mittelst dieses Werthes das allgemeine Glied der obigen Reihe oder der Partialwerth des x^{ten} Jahres in

$$100\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x-1} - a_{m+x}}{a_m},$$

und die Reihe selbst in folgende zwei

$$S\left[100\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x-1} - a_{m+x}}{a_m}\right]$$

$$= \frac{100}{a_m}\left[a_m\varrho + a_{m+1}\varrho^2 + a_{m+2}\varrho^3 + a_{m+3}\varrho^4 - \ldots\right]$$

$$- \frac{100}{a_m}\left[a_{m+1}\varrho + a_{m+2}\varrho^2 + a_{m+3}\varrho^3 + \ldots\right].$$

Die letztere der beiden Reihen ist eine einfache Leibrente auf Lebenszeit und durch

$$100 \times r_m$$

ausgedrückt; schreibt man dann in der ersteren Reihe das erste Glied allein und setzt ϱ als Factor der übrigen Glieder ausser Klammer, so stellt sich diese Reihe dar

$$100\,\varrho + \frac{100\,\varrho}{a_m}\left[a_{m+1}\varrho + a_{m+2}\varrho^2 + a_{m+3}\varrho^3 + \ldots\right],$$

der in Klammer stehende Ausdruck stimmt mit jenem der zweiten Reihe vollkommen überein, wenn wir das fehlende

---

hat uns in der That gewundert, dass der bekannte Mathematiker Wiegand in einer Art Brochüre diese Berechnung anwendet und auch Mathematikern empfiehlt, ohne auch nur der genaueren Berechnung Erwähnung zu thun.

Digitized by Google

letzte Glied seiner Kleinheit wegen unberücksichtigt lassen, und es ist die ganze erste Reihe durch

$$100\,\varrho + 100\,\varrho\,r_m = 100\,\varrho\,(1 + r_m)$$

ausgedrückt.

Wir haben demnach statt Gleichung **(1)** als gegenwärtigen Werth des Versicherungskapitals von 100 fl.

(2) $$S\left[100\,\varrho^x \frac{g_{m+x}}{a_m}\right] = 100\,\varrho\,(1 + r_m) - 100\,r_m$$
$$= 100\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m],$$

für eine gegenwärtig $m$jährige Person.

§. 60.

Einzahlung durch Prämien.

Das Versicherungskapital wird in der Regel durch jährliche Einzahlungen oder Prämien erworben, wesshalb die Berechnung der Prämien von besonderer Wichtigkeit ist.

Nehmen wir an, A ist gegenwärtig m Jahre alt und zahlt auf Lebenszeit die Prämie von jährlich b fl., so ist der Gesammtwerth seiner Zahlungen eine Leibrente auf Lebenszeit und durch

$$b \times r_m$$

oder durch

(1) $$b + b \times r_m$$

ausgedrückt, wenn die erste Prämie sogleich gezahlt wird.

Zahlt A hingegen sogleich den Betrag von

$$s_1 \text{ fl.}$$

und das Uebrige durch Prämien, so ist seine Gesammtleistung durch

(2) $$s_1 + b \times r_m$$

ausgedrückt.

Digitized by Google

§. 61.

Bestimmung der Prämie aus dem Versicherungskapital.

Eine $m$jährige Person A will ihr Leben gegen die Summe von s fl. versichern und Prämien auf Lebenszeit zahlen. Wie gross ist die Prämie b?

Die Einzahlung durch Prämien beträgt nach vorhergehendem Paragraph Gleichung **(1)**

$$b\,(1+r_m);$$

der gegenwärtige Werth des Versicherungskapitals von s fl. ist nach dem Paragraphen über „Versicherung auf Lebenszeit" Gleichung **(2)**

$$s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_m].$$

Da beide Werthe gleich sein müssen, so haben wir die Gleichung

(1) $$b\,(1+r_m) = s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_m],$$

und daraus die gesuchte Prämie

(2) $$b = \frac{s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_m]}{1+r_m}.$$

Beispiel. Welche Prämie hat ein 30jähriger Mann lebenslänglich zu zahlen, um sein Leben mit 1000 fl. zu versichern?

In diesem Falle ist nach Deparcieux und 3% Zinsen

$$r_m = r_{30} = 19{,}5446, \quad s = 1000,$$

$$\varrho = \frac{1}{1{,}03} = 0{,}97087,$$

somit

$$b = \frac{1000\,[0{,}97087 - 0{,}02912 \times 19{,}5446]}{20{,}5446}$$

$$= \frac{401{,}74}{20{,}5446} = 19{,}55 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

§. 62.

Das Versicherungskapital aus der Prämie.

Aus der Gleichung **(1)** des vorigen Paragraphen ist das Versicherungskapital s ausgedrückt durch

(1) $$s = \frac{b\,(1+r_m)}{\varrho - (1-\varrho)\,r_m}.$$

Beispiele. 1) Ein gegenwärtig 50jähriger Mann zahlt seit seinem 30sten Jahre die Prämie von jährlich 19,55 fl. Wie hoch ist sein Leben versichert?

Mit Benützung des vorigen Beispiels ist

$$s = \frac{19{,}55 \times 20{,}5446}{0{,}40174} = 1000 \text{ fl.}$$

2) Ein 30jähriger Mann zahlt beim Abschlusse seines Lebensversicherungs-Vertrages 200 fl. und verpflichtet sich auf Lebenszeit jährlich 15 fl. zu zahlen. Wie hoch ist er versichert?

Nach dem vorigen Paragraphen ist das Versicherungskapital allgemein durch

(2) $$s = \frac{s_1 + b\,r_m}{\varrho - (1-\varrho)\,r_m}$$

ausgedrückt; nach Deparcieux und 3% Zinsen ist

$$r_m = r_{30} = 19{,}5446, \quad s_1 = 200,$$
$$\varrho = 0{,}97087, \quad b = 15,$$
$$\varrho - (1-\varrho)\,r_m = 0{,}40174;$$

daher

$$s = \frac{200 + 15 \times 19{,}5446}{0{,}40174} = \frac{493{,}169}{0{,}40174}$$
$$= 1227{,}58 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

§. 63.

Prämientarif der Lebensversicherungs-Anstalt in München, nebst einer Lebensversicherungstafel nach Deparcieux.

In dem nachfolgenden Tarife ist das niederste Alter 10 und das höchste 65 Jahre; ausserdem hört die Prämienzahlung mit dem zurückgelegtem 85sten Lebensjahre auf.

Tarif

der jährlichen Prämien bei einer Versicherung auf Lebensdauer für 100 fl. Versicherungskapital.

Alter des Versicherten	Prämien-Betrag fl.	kr.	Alter des Versicherten	Prämien-Betrag fl.	kr.	Alter des Versicherten	Prämien-Betrag fl.	kr.
10	1	28	29	2	22	48	4	12
11	1	30	30	2	26	49	4	21
12	1	33	31	2	30	50	4	31
13	1	36	32	2	33	51	4	42
14	1	39	33	2	37	52	4	54
15	1	42	34	2	41	53	5	6
16	1	44	35	2	45	54	5	19
17	1	46	36	2	49	55	5	32
18	1	49	37	2	55	56	5	48
19	1	52	38	3	00	57	6	3
20	1	55	39	3	5	58	6	20
21	1	58	40	3	11	59	6	37
22	2	1	41	3	17	60	6	56
23	2	4	42	3	24	61	7	15
24	2	7	43	3	31	62	7	36
25	2	10	44	3	38	63	7	58
26	2	13	45	3	45	64	8	22
27	2	16	46	3	54	65	8	48
28	2	19	47	4	2			

Zur Vergleichung theilen wir eine nach Deparcieux berechnete Tafel mit, worin nicht nur die jährliche Prämie für jedes Alter, sondern auch der gegenwärtige Werth oder die Gesammteinzahlung des Versicherungskapitals von 100 fl. angegeben ist.

Digitized by Google

Gegenwärtiger Werth der einfachen Lebensversicherungen von 100 fl. Kapital nach den Tafeln von Deparcieux.

Alter	Gegenwärtiger Werth zu 3%	Jährliche Prämie zu 3%	Gegenwärtiger Werth zu 3½%	Jährliche Prämie zu 3½%	Gegenwärtiger Werth zu 4%	Jährliche Prämie zu 4%
0	51,133	3,047	48,267	3,155	45,971	3,272
1	36,465	1,671	32,828	1,652	29,947	1,644
2	34,370	1,525	30,605	1,491	27,628	1,468
3	32,892	1,427	29,023	1,382	25,965	1,348
4	31,831	1,360	27,871	1,306	24,742	1,264
5	31,227	1,322	27,197	1,263	24,010	1,215
6	30,849	1,299	26,756	1,235	23,516	1,182
7	30,660	1,287	26,511	1,219	23,222	1,163
8	30,590	1,283	26,389	1,212	23,054	1,152
9	30,594	1,283	26,344	1,209	22,962	1,146
10	30,725	1,291	26,430	1,214	23,006	1,149
11	30,980	1,307	26,646	1,228	23,184	1,160
12	31,344	1,329	26,977	1,249	23,481	1,180
13	32,787	1,357	27,392	1,275	23,865	1,205
14	32,289	1,389	27,870	1,306	24,316	1,235
15	32,831	1,423	28,390	1,340	24,810	1,269
16	33,377	1,459	28,916	1,375	25,311	1,303
17	33,907	1,494	29,424	1,409	25,794	1,336
18	34,417	1,528	29,913	1,443	26,256	1,369
19	34,409	1,562	30,381	1,475	26,697	1,400
20	35,380	1,594	30,828	1,507	27,115	1,430
21	35,841	1,627	31,263	1,538	27,522	1,460
22	36,303	1,660	31,700	1,569	27,929	1,490
23	36,766	1,693	32,138	1,601	28,336	1,520
24	37,230	1,727	32,576	1,633	28,744	1,551
25	37,694	1,762	33,014	1,666	29,151	1,582
26	38,158	1,797	33,452	1,699	29,558	1,613
27	38,622	1,832	33,890	1,733	29,964	1,645
28	39,110	1,870	34,353	1,769	30,395	1,679
29	39,623	1,911	34,842	1,808	30,854	1,716
30	40,161	1,954	35,359	1,849	31,342	1,755
31	40,726	2,001	35,905	1,894	31,861	1,798
32	41,308	2,050	36,469	1,941	32,398	1,843
33	41,919	2,102	37,064	1,991	32,968	1,891

Digitized by Google

Alter	Gegenwärtiger Werth zu 3%	Jährliche Prämie zu 3%	Gegenwärtiger Werth zu 3½%	Jährliche Prämie zu 3½%	Gegenwärtiger Werth zu 4%	Jährliche Prämie zu 4%
34	42,559	2,158	37,692	2,045	33,574	1,944
35	43,220	2,217	38,342	2,103	34,203	1,999
36	43,901	2,279	39,015	2,163	34,856	2,058
37	44,616	2,346	39,725	2,228	35,550	2,121
38	45,365	2,418	40,474	2,299	36,284	2,190
39	46,151	2,496	41,263	2,375	37,064	2,265
40	46,975	2,580	42,095	2,458	37,889	2,346
41	47,814	2,668	42,945	2,545	38,736	2,431
42	48,683	2,763	43,829	2,638	39,619	2,523
43	49,569	2,862	44,734	2,737	40,527	2,621
44	50,474	2,968	45,661	2,841	41,461	2,724
45	51,400	3,080	46,612	2,952	42,421	2,833
46	52,346	3,199	47,588	3,070	43,411	2,950
47	53,314	3,326	48,591	3,196	44,430	3,075
48	54,305	3,461	49,621	3,330	45,482	3,208
49	55,321	3,606	50,680	3,475	46,567	3,352
50	56,362	3,761	51,770	3,630	47,688	3,506
51	57,419	3,927	52,881	3,795	48,834	3,671
52	58,482	4,102	54,002	3,970	49,994	3,845
53	59,542	4,286	55,121	4,153	51,155	4,028
54	60,598	4,479	56,239	4,346	52,317	4,220
55	61,629	4,678	57,333	4,544	53,456	4,417
56	62,645	4,884	58,412	4,749	54,581	4,622
57	63,654	5,101	59,486	4,965	55,704	4,836
58	64,666	5,330	60,567	5,194	56,835	5,064
59	65,682	5,574	61,653	5,437	57,977	5,306
60	66,689	5,831	62,734	5,692	59,114	5,560
61	67,687	6,101	63,806	5,961	60,245	5,828
62	68,685	6,388	64,881	6,247	61,381	6,113
63	69,681	6,694	65,957	6,551	62,520	6,415
64	70,684	7,022	67,043	6,879	63,673	6,741
65	71,694	7,377	68,139	7,232	64,841	7,093
66	72,720	7,764	69,257	7,618	66,034	7,477
67	73,764	8,189	70,397	8,041	67,255	7,899
68	74,825	8,657	71,560	8,508	68,505	8,365
69	75,904	9,175	72,746	9,026	69,783	8,882
70	77,002	9,752	73,957	9,603	71,092	9,459

Digitized by Google

Alter	Gegenwärtiger Werth zu 3%	Jährliche Prämie zu 3%	Gegenwärtiger Werth zu 3½%	Jährliche Prämie zu 3½%	Gegenwärtiger Werth zu 4%	Jährliche Prämie zu 4%
71	78,108	10,392	75,180	10,243	72,419	10,099
72	79,210	11,097	76,402	10,949	73,748	10,805
73	80,270	11,850	77,581	11,702	75,033	11,559
74	81,253	12,624	78,675	12,476	76,226	12,332
75	82,180	13,432	79,708	13,283	77,356	13,139
76	83,014	14,235	80,639	14,085	78,374	33,939
77	83,823	15,092	81,543	14,940	79,363	14,791
78	84,617	16,021	82,432	15,867	80,339	15,716
79	85,399	17,036	83,309	16,879	81,303	16,725
80	86,123	18,076	84,121	17,915	82,197	17,758
81	86,843	19,225	84,943	19,060	83,090	18,899
82	87,535	20,454	85,711	20,284	83,950	20,117
83	88,201	21,773	86,462	21,597	84,780	21,424

Vermittelst dieser Tabellen lässt sich angeben, wie viel Prozent Provision die Bank von dem Versicherten nimmt.

Nehmen wir Beispielshalber eine 30jährige Person, den Disconto zu 3%, was mit andern Worten einer 3prozentigen Verzinsung der baaren Einzahlung des Versicherten gleichkommt, so ist die von der Bank festgesetzte Prämie

$$2 \text{ fl. } 26 \text{ kr.} = 2{,}4333 \text{ fl.}$$

und die der Rechnung nach der Sterblichkeitstafel von Deparcieux

$$= 1{,}9548 \text{ fl.}$$

Der Unterschied derselben beträgt

$$2{,}4333 - 1{,}9548 = 0{,}4785 \text{ fl.};$$

und von 100 fl. ergibt sich aus der Proportion

$$1{,}9548 : 0{,}4785 = 100 : x$$

eine Provision für die Bank von

$$x = \frac{47{,}85}{1{,}9548} = 24\tfrac{2}{5} \text{ fl. \%}.$$

Digitized by Google

Würden wir das der Prämie 2,433 entsprechende Versicherungskapital suchen, so käme dasselbe Resultat zum Vorschein.

Dass diese Provision von Seite der Bank zu hoch angesetzt ist, liegt auf der Hand; denn einerseits haben wir zu Gunsten der Bank den Disconto zu niedrig genommen; andererseits übernimmt die Bank soviel wie gar kein Risico, indem sie Personen, die den Statuten nicht entsprechen, zurückweist. Die Begünstigung, welche die Bank den Versicherten dadurch gewährt, dass mit dem 11ten Jahre nach der Aufnahme 5 % Rabatt in Abrechnung kommen, und das 85ste Lebensjahr die letzte Prämie zahlt, vermindert zwar die Provision der Bank, aber keineswegs in dem Maasse, dass der Bank nicht ein erheblicher Vortheil gesichert bliebe. Indess ist diese Provision nicht für jedes Alter gleich und natürlich auch von der Sterblichkeitstafel abhängig, welche der Rechnung zu Grunde liegt.

§. 64.

Anwendung der Lebensversicherungstafel.

Wie die mitgetheilte berechnete Tafel zur Berechnung von Lebensversicherungen und der entsprechenden Prämien benützt werden kann, wollen wir an einigen Beispielen zeigen.

Beispiele. 1) Wie hoch kann ein 36jähriger Mann sein Leben versichern, wenn er eine Prämie von jährlich 102 fl. 54 kr. lebenslänglich zahlt? (4 %)

Nach der Tafel von Deparcieux (4 %) entspricht der Prämie von

2,058 fl.

das Versicherungskapital von 100 fl., so dass sich aus der Proportion

$$2{,}058 : 100 = 102{,}9 : s$$

das Versicherungskapital s ergibt

$$s = \frac{102{,}9}{2{,}058}\, 100 = 5000 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

2) Welche jährliche Prämie b hat ein 28jähriger Mann lebenslänglich zu zahlen, wenn er sein Leben auf 3000 fl. versichern will? ($3^1/_2\,\%$)

Für 100 fl. Kapital ist

1,7696 als jährliche Prämie

zu leisten; und folglich für 3000 fl.

$$100 : 1{,}7696 = 3000 : b$$

$$b = 53{,}088 \text{ fl.} = 53 \text{ fl. } 5^1/_4 \text{ kr.}$$

3) Welche jährliche Prämie hat ein 40jähriger Mann lebenslänglich zu leisten, wenn er sein Leben auf 4000 fl. versichern will und sogleich 1000 fl. baar einzahlt? ($3^1/_2\,\%$)

Aus der Gleichung

$$s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m] = s_1 + b\,r_m$$

ist die Prämie b allgemein durch

$$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m] - s_1}{r_m}$$

ausgedrückt; nun ist nach der Lebensversicherungstafel ($3^1/_2\,\%$)

$$\varrho - (1-\varrho)\,r_{40} = 0{,}42095 \text{ fl.}$$

und nach der Leibrententafel

$$r_m = r_{40} = 16{,}1233;$$

folglich wegen

$$s = 4000 \text{ und } s_1 = 1000,$$

$$b = \frac{4000 \times 0{,}42095 - 1000}{16{,}1233} = \frac{683{,}8}{16{,}1233}$$

$$= 42{,}41 \text{ fl.} = 42 \text{ fl. } 24^1/_2 \text{ kr.}$$

§. 85.

II.

Temporäre Versicherung Eines Lebens.

Eine $m$jährige Person A lässt ihr Leben mit einer Summe von s fl. auf x Jahre von heute an versichern. Welches ist der gegenwärtige Werth des Versicherungskapitals?

Digitized by Google

Die Berechnung dieses Werthes wurde schon in dem Paragraphe über „Versicherung auf Lebenszeit“ angedeutet durch

$$S\left[100\,\varrho^x\,\frac{g_{m+x}}{a_m}\right] = S\left[100\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x-1}-a_{m+x}}{a_m}\right],$$

worin x so viele Werthe annimmt, als die Versicherungszeit Jahre umfasst.

Mittelst einer Sterblichkeitstafel lassen sich die einzelnen Glieder nacheinander bilden und nachher in eine Summe vereinigen, wodurch die Aufgabe gelöst ist. Um aber das gliedweise Summiren zu umgehen, können wir, wie früher, die rechte Seite in 2 Reihen auflösen, wodurch wir erhalten

$$S\left[100\,\varrho_r\,\frac{g_{m+x}}{a_m}\right]$$

$$= \frac{100}{a_m}\left[\varrho\,a_m + \varrho^2\,a_{m+1} + \varrho^3\,a_{m+2} + \ldots + \varrho^r\,a_{m+x-1}\right]$$

$$- \frac{100}{a_m}\left[\varrho\,a_{m+1} + \varrho^2\,a_{m+2} + \varrho^3\,a_{m+3} + \ldots + \varrho^r\,a_{m+x}\right].$$

Die letztere der beiden Reihen ist eine temporäre Leibrente auf x Jahre von jährlich 100 fl. und durch

$$100\,[r_m - {}_xr_m] = 100\left[r_m - \frac{a_{m+x}}{a_m}\,\varrho^x\,r_{m+x}\right]$$

ausgedrückt. Aehnliches gilt von der ersteren, wenn wir das erste Glied derselben allein schreiben und ϱ als gemeinschaftlichen Factor ausser Klammer setzen.

Dadurch erhalten wir

$$100\,\varrho + \frac{100\,\varrho}{a_m}\left[\varrho\,a_{m+1} + \varrho^2\,a_{m+2} + \ldots + \varrho^{r-1}\,a_{m+x-1}\right]$$

$$= 100\,\varrho + 100\,\varrho\,[r_m - {}_{(x-1)}r_m] = 100\,\varrho\,[1 + r_m - {}_{(x-1)}r_m],$$

indem der mit der Klammer versehene zweite Theil eine temporäre Leibrente auf $(x-1)$ Jahre vorstellt.

Die temporäre Lebensversicherung lässt sich demnach darstellen durch

$$\textbf{(1)}\quad S\left[100\,\varrho^x\,\frac{g_{m+x}}{a_m}\right] = 100\,\varrho\,[1 + r_m - {}_{(x-1)}r_m] - 100\,[r_m - {}_xr_m]$$

$$= 100\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m - (\varrho\,{}_{(x-1)}r_m - {}_xr_m)];$$

Digitized by Google

oder auch mit Rücksicht auf die Sterblichkeitstafeln, indem nach der bisherigen Bezeichnung

$$\varrho\,{}_{(x-1)}r_m = \frac{a_{m+x-1}}{a_m}\,\varrho^x\,r_{m+x-1},$$

$${}_xr_m = \frac{a_{m+x}}{a_m}\,\varrho^x\,r_{m+x},$$

und durch Subtraction

$$\varrho\,{}_{(x-1)}r_m - {}_xr_m = \frac{a_{m+x-1}}{a_m}\,\varrho^x\,r_{m+x-1} - \frac{a_{m+x}}{a_m}\,\varrho^x\,r_{m+x}$$

wird, haben wir statt Gleichung **(1)**

(2)
$$S\left[100\,\varrho^x\,\frac{g_{m+x}}{a_m}\right]$$

$$= 100\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m] - \frac{100\,\varrho^x}{a_m}\,[a_{m+x-1}\,r_{m\,|\,x-1} - a_{m+x}\,r_{m+x}].$$

Beispiele. 1) Was ist eine nach 10 Jahren aufhörende Lebensversicherung von 2000 fl. für eine 36jährige Person werth?

Nach Deparcieux ($3^1/_2$ %) ist

$\varrho - (1-\varrho)\,r_{36} = 0{,}390159$; $a_m = a_{36} = 4688$
$r_{m+x-1} = r_{45} = 14{,}7874$; $a_{m+x-1} = a_{45} = 4239$
$r_{m+x} = r_{46} = 14{,}4987$; $a_{m+x} = a_{46} = 4186$.

Mithin nach Gleichung **(2)**, wenn wir 2000 statt 100 schreiben

$$S\left[2000\,\varrho^x\,\frac{g_{m+x}}{a_m}\right]$$
$$= 2000\left[0{,}390159 - \frac{\varrho^{10}}{4688}\left(a_{45}\,r_{45} - a_{46}\,r_{46}\right)\right]$$
$$= 2000\,[0{,}390159 - 0{,}301264]$$
$$= 2000 \times 0{,}088895$$
$$= 177{,}79 \text{ fl.} = 177 \text{ fl. } 47^2/_5 \text{ kr.}$$

2) (Jones) Was ist eine nach 7 Jahren aufhörende Lebensversicherung von 400 fl. für eine 38jährige Frau gegenwärtig werth? (Brune $3^1/_2$ %)

Antwort. 28 fl. 16 kr.

Digitized by Google

§. 66.

III.

Aufgeschobene Versicherung Eines Lebens.

Eine $m$jährige Person A schliesst mit einer Versicherungs-Anstalt einen Vertrag dahin ab, dass nach ihrem Tode die Summe von s fl. an ihre Erben ausbezahlt werden. Was hat A baar einzuzahlen, wenn die Verbindlichkeit der Anstalt erst nach x Jahren beginnt?

Der gegenwärtige Werth des Versicherungskapitals von s ist, nach dem Paragraphe über „Versicherung auf Lebenszeit" Gleichung (**2**), für eine $m$jährige Person werth

$$s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_m],$$

und für eine gegenwärtig $(m+x)$jährige

$$s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m+x}].$$

Da nun A nach x Jahren diesen Werth antreten wird, so beträgt er auf die Gegenwart discontirt

$$s\,\varrho^x\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m+x}];$$

die Wahrscheinlichkeit, dass A bis dahin leben wird ist ausgedrückt durch

$$p_x = \frac{a_{m+x}}{a_m}.$$

Das Product aus den beiden letzten Ausdrücken

(**1**) $$s\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x}}{a_m}\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m+x}]$$ [1])

ist der gegenwärtige Werth des Versicherungskapitals von s fl.

---

[1]) Würde die Summe von s fl. sogleich nach dem überlebten x^{ten} Jahre an A selbst ausbezahlt, so wäre einfach s auf die Gegenwart zu discontiren, und mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_x = \frac{a_{m+x}}{a_m}$$

zu multipliziren. Dadurch erhalten wir

$$s\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x}}{a_m}$$

als gegenwärtigen Werth der nach x Jahren an A zahlbaren Summe

Digitized by Google

§. 67.

Einzahlung durch Prämien.

Soll der in (**1**) verzeichnete Werth innerhalb x Jahren durch Prämien abgezahlt werden, so ist das, was A während dieser Zeit einzahlt, eine temporäre Leibrente von x Jahren für die Anstalt und durch

$$b + b\,[r_m - {}_x r_m]$$

ausgedrückt, wenn, wie es gewöhnlich geschieht, die erste Prämie sogleich eingezahlt wird. Aus der Gleichung

$$(\mathbf{1}) \qquad b\,[1 + r_m - {}_x r_m] = s\,\varrho^x \frac{a_{m+x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m+x}]$$

lässt sich die Prämie b für jeden vorgelegten Fall bestimmen.

2. Abtheilung.

Versicherung mehrerer Leben.

§. 68.

I.

Versicherung zweier Leben auf Lebenszeit.

Eine $m$jährige Person A und eine $n$jährige B lassen ihr Leben mit einer Summe von s fl. versichern, so zwar, dass s nur dann ausbezahlt wird, wenn entweder

1) das Erste von Beiden, gleichgiltig ob A oder B;
2) das Letzte von Beiden, also Beide gestorben sind.

Welches ist der gegenwärtige Werth der Versicherungssumme in jedem der beiden Fälle?

---

von s fl. Solche Fälle kommen bei Ausstattungs- oder Aussteuer-Anstalten vor.

Noch ist hier ein Fall zu erwähnen, der mit einer aufgeschobenen Versicherung Aehnlichkeit hat. Es kann sich eine Person gegenwärtig auf s fl. versichern lassen und nach mehreren Jahren eine höhere Versicherung wünschen. In diesem Falle ist die Erhöhung als eine selbstständige Versicherung zu betrachten und nach dem nunmehrigen Alter zu berechnen.

Digitized by Google

Der gegenwärtige Werth besteht aus ebensoviel Partialwerthen, als die Versicherungszeit Jahre umfasst. Die nach x Jahren zahlbare Summe s fl. ist gegenwärtig werth

$$s\left(\frac{1}{1+z}\right)^x = s\,\varrho^x;$$

bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass s im x^{ten} Jahre zahlbar ist, allgemein mit

$$p_x,$$

so ist das Product

$$s\,\varrho^x\,p_x$$

der gegenwärtige Partialwerth des x^{ten} Jahres, und die Summe aller Partialwerthe

(**1**) $$S\,[s\,\varrho^x\,p_x] = s\,[\varrho p_1 + \varrho^2 p_2 + \varrho^3 p_3 + \ldots.]$$

der gegenwärtige Totalwerth für obige beide Fälle. Um aber aus diesem allgemeinen Ausdrucke jeden Fall gesondert zu erhalten, haben wir nur die den verschiedenen p entsprechenden Werthe einzusetzen.

1. Fall. Die Wahrscheinlichkeit, dass gerade im x^{ten} Jahre das Erste von Beiden stirbt ist

$$p_x = \frac{a_{m+x-1}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x-1}}{a_n} - \frac{a_{m+x}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+x}}{a_n},$$

und folglich besteht nach Gleichung (**1**) der Totalwerth aus folgenden 2 Reihen

$$S\,[s\,\varrho^x\,p_x]$$

$$= \frac{s}{a_m\,a_n}\,[\varrho\,a_m a_n + \varrho^2\,a_{m+1}\,a_{n+1} + \varrho^3\,a_{m+2}\,a_{n+2} + \ldots]$$

$$- \frac{s}{a_m\,a_n}\,[\varrho\,a_{m+1}\,a_{n+1} + \varrho^2\,a_{m+2}\,a_{n+2} + \varrho^3\,a_{m+3}\,a_{n+3} + \ldots];$$

die letztere der beiden Reihen ist eine Verbindungsrente für 2 Leben und durch

$$s\,r_{m,\,n}$$

ausgedrückt; die erstere lässt sich gleichfalls durch eine Verbindungsrente ausdrücken, wenn wir das erste Glied allein schreiben und den gemeinschaftlichen Factor ϱ der übrigen

Digitized by Google

Glieder ausser Klammer setzen. Dadurch erhalten wir, wenn wir das Vorzeichen nicht berücksichtigen

$$s\varrho + \frac{s\varrho}{a_m a_n}\left[\varrho\, a_{m+1} a_{n+1} + \varrho^2 a_{m+2} a_{n+2} + \ldots\right]$$
$$= s\varrho + s\varrho\, r_{m,n} = s\varrho(1 + r_{m,n}),$$

worin auf das fehlende letzte Glied seiner Kleinheit wegen nicht Rücksicht genommen wurde. Der Totalwerth ist demnach durch

$$(\mathbf{2}) \qquad S[s\varrho^x p_x] = s\varrho(1 + r_{m,n}) - s\, r_{m,n}$$
$$= s[\varrho - (1-\varrho) r_{m,n}]$$

ausgedrückt.

2. Fall. Die Wahrscheinlichkeit, dass gerade im x^{ten} Jahre das Letzte von Beiden sterben wird, ist[1])

$$\frac{a_{m+x-1} - a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n} - \left[\frac{a_{m+x-1}a_{n+x-1} - a_{m+x}a_{n+x}}{a_m a_n}\right];$$

der obigen Gleichung (**1**) zu Folge haben wir demnach

$$S[s\varrho^x p_x] = S\left\{s\varrho^x\left[\frac{a_{m+x-1} - a_{m+x}}{a_m} + \frac{a_{n+x-1} - a_{n+x}}{a_n}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{a_{m+x-1}a_{n+x-1} - a_{m+x}a_{n+x}}{a_m a_n}\right]\right\}.$$

Die Ausführung dieses aus 3 Theilen zusammengesetzten Ausdrucks hat keine Schwierigkeit mehr, wenn wir Gleichung (**2**) und die Resultate des §. 59 zu Hilfe nehmen.

Der erste Theil bedeutet eine Lebensversicherung für A, der zweite eine für B und endlich der dritte eine Versicherung auf den ersten Todesfall von beiden Personen A und B, so dass wir unter Berücksichtigung des Vorzeichens folgendes Resultat

$$S[s\varrho^x p_x] = s[\varrho - (1-\varrho) r_m] + s[\varrho - (1-\varrho) r_n]$$
$$- s[\varrho - (1-\varrho) r_{m,n}]$$
$$= s\varrho - s(1-\varrho)(r_m + r_n) + s(1-\varrho) r_{m,n}$$

oder endlich

$$(\mathbf{3}) \qquad S[s\varrho^x p_x] = s[\varrho - (1-\varrho)(r_m + r_n - r_{m,n})]$$

als gegenwärtigen Werth der Versicherungssumme von s fl. haben, welche nach dem Tode des Letztlebenden zahlbar ist.

---

[1]) **Dr. Wild**, Probleme der Statistik etc., §. 35, Gl. (**1**).

Digitized by Google

§. 69.

Die jährliche Prämie aus der Versicherungssumme und umgekehrt.

Welche jährliche Prämie b haben A und B in den vorigen beiden Fällen zu leisten, wenn die erste Prämie sogleich oder s_1 fl. statt der ersten Prämie sogleich eingezahlt werden?

1. Fall. Die jährliche Prämie wird so lange gezahlt, als Beide noch am Leben sind. Folglich ist die Summe aller Prämien eine Verbindungsrente für zwei Leben zahlbar an die Anstalt vermehrt um die erste Prämie b oder s_1 fl., und durch

$$b + b\, r_{m,n} \text{ oder}$$
$$s_1 + b\, r_{m,n}$$

ausgedrückt. Da die Einzahlung dem gegenwärtigen Werth der Versicherungssumme s gleich sein muss, so haben wir die Gleichung

(1) $\quad b\,(1+r_{m,n}) = s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n}]$ oder

(2) $\quad s_1 + b\,r_{m,n} = s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n}]$,

je nachdem anfänglich b oder s_1 eingezahlt wird.

Beispiele. **1**) Eine 30 und eine 36jährige Person lassen ihr Leben mit 2000 fl. in der Weise versichern, dass die Versicherungssumme am Ende des Jahres zahlbar ist, in welchem Eins von Beiden stirbt. Welche jährliche Prämie haben sie zu zahlen?

Nach Gleichung (**1**) ist die Prämie allgemein

(3) $$b = \frac{s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n}]}{1+r_{m,n}},$$

nach Deparcieux und $3\frac{1}{2}\,\%$ Zinsen ist

$$r_{m,n} = r_{36,\,30} = 14{,}296$$
$$\varrho = 0{,}966183;\ 1-\varrho = 0{,}033816,$$

daher

$$b = \frac{2000\,[0{,}966183 - 0{,}033816 \times 14{,}296]}{15{,}296}$$
$$= \frac{2000 \times 0{,}48275}{15{,}296} = 63{,}121 \text{ fl.}$$
$$= 63 \text{ fl. } 7\frac{1}{5} \text{ kr.}$$

Digitized by Google

2) Welche jährliche Prämie ist im vorigen Beispiel zu zahlen, wenn sogleich 500 fl. baar eingezahlt werden?

Nach Gleichung (**2**) ist allgemein

(**4**) $$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m,n}] - s_1}{r_{m,n}}$$

und mit den vorigen Zahlenwerthen

$$b = \frac{2000 \times 0{,}48275 - 500}{14{,}296}$$

$$= \frac{465{,}5}{14{,}296} = 32{,}562 \text{ fl.} = 32 \text{ fl. } 33^7/_{10} \text{ kr.}$$

3) Welche Summe s_1 ist sogleich zu zahlen, wenn die beiden Personen in Beispiel (**1**) ihr Leben mit 2000 fl. versichern und jährlich 32,562 fl. als Prämie zahlen wollen?

Aus Gleichung (**2**) ist allgemein

(**5**) $$s_1 = s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m,n}] - b\,r_{m,n},$$

folglich nach unserm Beispiele

$$s_1 = 2000 \times 0{,}48275 - 14{,}296 \times 32{,}562$$
$$= 965{,}5 - 465{,}5 = 500 \text{ fl.}$$

4) Wie hoch können sich eine 30 und eine 36jährige Person auf das Leben des Erststerbenden versichern, wenn sie sogleich 500 fl. und eine jährliche Prämie von 32,562 fl. zahlen?

Nach Gleichung (**2**) ist allgemein

$$s = \frac{s_1 + b\,r_{m,n}}{\varrho - (1-\varrho)\,r_{m,n}}$$

und mit den Zahlenwerthen des Beispiels

$$s = \frac{500 + 32{,}562 \times 14{,}296}{0{,}48275}$$

$$= \frac{500 + 465{,}5}{0{,}48275} = \frac{965{,}5}{0{,}48275} = 2000 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

§. 70.

Fortsetzung.

2. Fall. A und B zahlen in diesem Falle die jährliche Prämie so lange, als Eins von Beiden am Leben sein wird. Der Betrag aller Prämien ist daher eine Leibrente auf das längste von zwei Leben von jährlich b fl. und durch

$$b\,[r_m + r_n - r_{m,n}]$$

ausgedrückt. Dazu kommt noch die erste Prämie b oder die erste Baarzahlung s_1, so dass der Betrag aller Leistungen von A und B durch

(6) $\quad b + b\,[r_m + r_n - r_{m,n}]$ oder

(7) $\quad s_1 + b\,[r_m + r_n - r_{m,n}]$

ausgedrückt ist. Da ferner die Einzahlung dem in Gleichung (3) §. 68 verzeichneten Versicherungswerth gleichkommen muss, so haben wir die Gleichung

(8) $b\,[1 + r_m + r_n - r_{m,n}] = s\,[\varrho - (1-\varrho)(r_m + r_n - r_{m,n})]$

oder endlich

(9) $s_1 + b\,(r_m + r_n - r_{m,n}) = s\,[\varrho - (1-\varrho)(r_m + r_n - r_{m,n})]$,

je nachdem b oder s_1 anfänglich eingezahlt wird.

Beispiele. 1) Ein 41jähriger Mann und eine 36jährige Frau versichern auf das Leben des Letztsterbenden die Summe von 2000 fl. Welches ist der baare Werth und welches die jährliche Prämie dieser Versicherung?

Der baare Werth ist allgemein

$$s\,[\varrho - (1-\varrho)\,(r_m + r_n - r_{m,n})]\,,$$

nach Brune und $3\frac{1}{2}\,\%$ Zinsen ist

$$r_m = r_{41} = 15{,}0125\,, \qquad \varrho = 0{,}966183\,,$$
$$r_n = r_{36} = \underline{16{,}8780}\,, \qquad 1-\varrho = 0{,}033816\,,$$
$$31{,}8905$$
$$r_{m,n} = r_{41,36} = \underline{12{,}6405}\,,$$
$$19{,}2500$$

daher der baare Werth

$$2000\,(0{,}96618 - 0{,}033816 \times 12{,}25) = 630{,}4 \text{ fl.}$$

Digitized by Google

Aus Gleichung (**8**) ist die Prämie allgemein

$$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,(r_m + r_n - r_{m,n})]}{1 + r_m + r_n - r_{m,n}}$$

$$= \frac{630{,}4}{20{,}25} = 31{,}13 \text{ fl.} = 31 \text{ fl. } 7^1/_5 \text{ kr.}$$

2) Welche jährliche Prämie b haben beide Personen des vorigen Beispiels zu zahlen, wenn sie sogleich 300 fl. baar einzahlen?

Aus Gleichung (**9**) ist allgemein die Prämie

$$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,(r_m + r_n - r_{m,n})] - s_1}{r_m + r_n - r_{m,n}}$$

und mit Rücksicht auf das vorige Beispiel

$$b = \frac{630{,}4 - 300}{19{,}25} = \frac{330{,}4}{19{,}25} = 17{,}16 \text{ fl.}$$

$b = 17$ fl. $9^3/_5$ kr.

§. 71.

II.

Versicherung dreier Leben auf Lebenszeit.

a) Versicherung auf das Erststerbende.

Welches ist der gegenwärtige Werth des Versicherungskapitals von s fl., zahlbar nach dem Tode des Ersten von drei Personen A, B und C, welche gegenwärtig m, n und q Jahre alt sind?

Der gegenwärtige Werth besteht aus so viel Partialwerthen, als die Versicherungszeit Jahre umfasst. Bezeichnen wir mit

$$p_x$$

allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass s am Ende des x^{ten} Jahres zahlbar wird, so ist auch hier das Product

$$p_x\, s\, \varrho^x$$

der gegenwärtige Partialwerth des x^{ten} Jahres und die Summe

(**1**) $$S\,[s\,\varrho^x\,p_x] = s\,[\varrho\,p_1 + \varrho^2 p_2 + \varrho^3 p_3 + \ldots.)$$

der gesuchte Totalwerth.

Digitized by Google

Die Wahrscheinlichkeit ist aber[1])

$$p_x = \frac{a_{m+x-1}\, a_{n+x-1}\, a_{q+x-1} - a_{m+x}\, a_{n+x}\, a_{q+x}}{a_m\, a_n\, a_q}.$$

Um Raum zu ersparen, bilden wir das Resultat nach Analogie des §. 68, da sich die nämliche Betrachtung fast wörtlich wiederholt, und erhalten

(2) $$S\,[s\,\varrho^x\,p_x] = s\,\varrho + s\,\varrho\,r_{m,n,q} - s\,r_{m,n,q}$$
$$= s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m,n,q}].$$

b) Versicherung auf das Letztsterbende.

Welches ist der gegenwärtige Werth, wenn s erst nach dem Tode des Letzten der vorigen 3 Personen zahlbar ist?

In diesem Falle ändert sich nichts, als die Wahrscheinlichkeit p_x.[2]) Setzen wir diesen Werth statt p_x in den allgemeinen Ausdruck des vorigen Paragraphen und verfahren in der Reihenbildung analog den früheren Paragraphen, so erhalten wir ein der Gleichung **(3)** §. 68 völlig analoges Resultat, nämlich

(3) $$S\,[s\,\varrho^x\,p_x]$$
$$= s\,[\varrho - (1-\varrho)\,(r_m + r_n + r_q - r_{m,n} - r_{m,q} - r_{n,q} + r_{m,n,q})].$$

§. 72.

Einzahlung durch Prämien.

Welche jährliche Prämie b haben A, B und C in den beiden Fällen der letzten zwei Paragraphen zu zahlen?

1. Fall. Die jährliche Prämie wird so lange gezahlt, als alle 3 noch am Leben sind. Die Summe aller Prämien ist daher eine Verbindungsrente von jährlich b fl. für 3 Personen und nach §. 33 durch

$$b \times r_{m,n,q}$$

oder mit der ersten Prämie durch

$$b + b\,r_{m,n,q}$$

ausgedrückt, so dass wir zur Berechnung von b folgende Gleichung haben

(1) $$b\,(1 + r_{m,n,q}) = s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m,n,q}].$$

[1]) **Dr. Wild**, Probleme der Statistik etc., §. 34, Gl. **(2)**.
[2]) **Dr. Wild**, Probleme der Statistik etc., §. 35, Gl. **(2)**.

Digitized by Google

2. Fall. Die jährliche Prämie wird so lange gezahlt, als noch Eins am Leben ist; die Summe aller Prämien ist daher eine Leibrente auf die Längstlebende von 3 Personen, vermehrt um die erste Prämie und mit Rücksicht auf §. 34 ausgedrückt durch

$$b + b\,(r_m + r_n + r_q - r_{m,n} - r_{m,q} - r_{n,q} + r_{m,n,q}).$$

Setzen wir diesen Ausdruck den in Gleichung (3) verzeichneten gegenwärtigen Werth der Versicherungssumme s gleich, so haben wir zur Berechnung von b die Gleichung

$$(2)\quad b\,[1 + r_m + r_n + r_q - r_{m,n} - r_{m,q} - r_{n,q} + r_{m,n,q}]$$
$$= s\,[\varrho - (1-\varrho)(r_m + r_n + r_q - r_{m,n} - r_{m,q} - r_{n,q} - r_{m,n,q})].$$

Würde statt der ersten Prämie b eine baare Summe von s_1 fl. gezahlt, so kann diese Abänderung nach den früheren Paragraphen ohne Schwierigkeit angebracht werden.

§. 73.

III.

Temporäre Versicherung auf das Leben des Erststerbenden.

Eine $m$jährige Person A und eine $n$jährige B lassen ihr Leben mit s fl. versichern, welche Summe am Ende des Jahres zahlbar ist, in welchem das Erste von Beiden innerhalb der nächsten x Jahre stirbt. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Versicherung?

Dieser ist nach §. 68 dadurch ausgedrückt, dass wir in der Gleichung

$$S\,[s\,\varrho^x\,p_x]$$
$$= \frac{s}{a_m a_n}\,[\varrho\,a_m a_n + \varrho^2\,a_{m+1}\,a_{n+1} + \varrho^3\,a_{m+2}\,a_{n+2} + \ldots]$$
$$- \frac{s}{a_m a_n}\,[\varrho\,a_{m+1}\,a_{n+1} + \varrho^2\,a_{m+2}\,a_{n+2} + \varrho^3\,a_{m+3}\,a_{n+3} + \ldots]$$

nur so viele Glieder nehmen, als durch x angezeigt ist, was wir schon früher für Eine Person ausgeführt haben. Beide Reihen lassen sich durch temporäre Leibrenten darstellen und

Digitized by Google

zwar wird aus der ersten Reihe unter Berücksichtigung, dass das letzte Glied in der Klammer $\varrho^{x-1} a_{m+x-1} a_{n+x-1}$ ist

$$s\varrho + \frac{s\varrho}{a_m a_n}\left[\varrho a_{m+1} a_{n+1} + \varrho^2 a_{m+2} a_{n+2} + \ldots + \varrho^{x-1} a_{m+x-1} a_{n+x-1}\right]$$

$$= s\varrho + s\varrho\, r_{m,n} - s\varrho^x \frac{a_{m+x-1} a_{n+x-1}}{a_m a_n} r_{m+x-1,n+x-1}$$

$$= s\varrho + s\varrho\, r_{m,n} - s\varrho\, {}_{(x-1)}r_{m,n}$$

$$= s\varrho\left[1 + r_{m,n} - {}_{(x-1)}r_{m,n}\right],$$

und die zweite ist sogleich durch

$$s\left[r_{m,n} - {}_x r_{m,n}\right]$$

dargestellt, so dass wir folgenden Ausdruck

(1) $$s\varrho\left[1 + r_{m,n} - {}_{(x-1)}r_{m,n}\right] - s\left[r_{m,n} - {}_x r_{m,n}\right]$$
$$= s\left[\varrho - (1-\varrho)\, r_{m,n} - \varrho\, {}_{(x-1)}r_{m,n} + {}_x r_{m,n}\right]$$

als gegenwärtigen Werth einer temporären Versicherung auf x Jahre haben.

§. 74.

Bestimmung der jährlichen Prämie.

Die dem vorigen Fall entsprechende Prämie wird so lange gezahlt, als innerhalb der nächsten x Jahre Beide am Leben sind. Der Betrag aller während dieser Zeit einzuzahlenden Prämien ist daher eine Verbindungsrente zweier Personen von jährlich b fl., vermehrt um die erste Prämie und mit Rücksicht auf §. 24 durch

$$b + b\left(r_{m,n} - {}_x r_{m,n}\right)$$

ausgedrückt. Da dieser Werth dem in **(1)** des vorigen Paragraphen verzeichneten gleich sein muss, so haben wir zur Bestimmung von b und umgekehrt von s die Gleichung

(2) $$b\,(1 + r_{m,n} - {}_x r_{m,n})$$
$$= s\left[\varrho - (1-\varrho)\, r_{m,n} - \varrho\, {}_{(x-1)}r_{m,n} + {}_x r_{m,n}\right].$$

Digitized by Google

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

§. 75.

Temporäre Versicherung auf das Leben des Letztsterbenden.

A und B lassen ihr Leben auf die Summe von s fl. in der Weise versichern, dass s nur dann zahlbar ist, wenn Beide innerhalb der nächsten x Jahre sterben. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Versicherung?

Diesen Werth erhalten wir sogleich aus der „Versicherung auf Lebenszeit" Gleichung **(3)**

$$\textbf{(1)} \qquad S = s\,[\varrho - (1-\varrho)\,(r_m + r_n - r_{m,n})]$$

dadurch, dass wir von diesem Ausdrucke eine um x Jahre aufgeschobene Versicherung abziehen.

Mit Benützung des §. 65 beträgt dieser Abzug mit Berücksichtigung der Vorzeichen

$$\textbf{(2)} \qquad S_x = s\,[(\varrho_{(x-1)} r_m - {}_x r_m) + (\varrho_{(x-1)} r_n - {}_x r_n) - (\varrho_{(x-1)} r_{m,n} - {}_x r_{m,n}),$$

so dass der gesuchte gegenwärtige Werth durch

$$\textbf{(3)} \qquad S - S_x = s\,[\varrho - (1-\varrho)\,(r_m + r_n - r_{m,n})] - s\,[(\varrho_{(x-1)} r_m - {}_x r_m) + (\varrho_{(x-1)} r_n - {}_x r_n) - (\varrho_{(x-1)} r_{m,n} - {}_x r_{m,n})]$$

ausgedrückt ist.

Weitere Erörterungen über temporäre Versicherungen halten wir wegen der geringen practischen Bedeutung nicht für nothwendig. Aus demselben Grunde haben wir es auch unterlassen, Zahlenbeispiele beizufügen.

3. Abtheilung.

Ueberlebungsversicherungen.

Darunter versteht man zum Unterschiede der bisher betrachteten Versicherungen, solche, wobei die Bestimmung getroffen ist, dass das Ableben in einer vorgeschriebenen Ordnung erfolgen muss.

Digitized by Google

§. 76.

Ueberlebungsversicherungen für zwei Personen auf Lebenszeit.

Welchen gegenwärtigen Werth hat die versicherte Summe von s fl. für eine $m$jährige Person A, wenn dieselbe zahlbar ist, sobald eine $n$jährige Person B gestorben, und A selbst noch am Leben ist?

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Entscheidung im x^{ten} Jahre eintritt, d. h. dass A den B im x^{ten} Jahre überlebt ist

$$p_x = \frac{a_{m+}}{a_m} \cdot \frac{g_{n+}}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{g_{m+x}}{a_m} \cdot \frac{g_{n+x}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{g_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{m+x-1} + a_{m+x}}{a_m};$$

die in diesem Jahre zahlbaren s fl. sind gegenwärtig werth

$$s \left(\frac{1}{1+z}\right)^x = s \varrho^x,$$

und folglich ist der dem x^{ten} Jahre entsprechende Partialwerth durch das Product

$$s \varrho^x p_x = s \varrho^x \cdot \frac{1}{2} \frac{g_{n+x}}{a_n} \cdot \frac{a_{m+x-1} + a_{m+x}}{a_m}$$

ausgedrückt. Indem wir daraus alle Partialwerthe für

$$x = 1, 2, 3 \ldots.$$

bilden und in eine Summe zusammenfassen, erhalten wir den Totalwerth, eine Operation, welche wir schon zu wiederholten Malen ausgeführt haben.

Zuvor wollen wir noch

$$g_{n+x} = a_{n+x-1} - a_{n+x}$$

substituiren, wodurch wir erhalten

$$S[s \varrho^x p_x] = S\left[\frac{1}{2} s \varrho^x \frac{(a_{m+x-1} + a_{m+x})(a_{n+x-1} - a_{n+x})}{a_m a_n}\right]$$

$$= S\left[\frac{1}{2} s \varrho^x \left(\frac{a_{m+x-1} a_{n+x-1} - a_{m+x} a_{n+x} + a_{m+x} a_{n+x-1} - a_{m+x-1} a_{n+x}}{a_m a_n}\right)\right],$$

Digitized by Google

welcher Ausdruck sich in folgende 2 Theile zerlegen lässt

$$S\,[s\,\varrho^x\,p_x] = S\left[\frac{1}{2}\,s\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x-1}\,a_{n+x-1} - a_{m+x}\,a_{n+x}}{a_m\,a_n}\right]$$
$$+\,S\left[\frac{1}{2}\,s\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x}\,a_{n+x-1} - a_{m+x-1}\,a_{n+x}}{a_m\,a_n}\right].$$

Der erste Theil ist eine Versicherung auf das Erststerbende und durch

$$\frac{1}{2}\,s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m,n}]$$

ausgedrückt; der zweite Theil lässt sich auf eine Verbindungsrente reduciren, wenn wir berücksichtigen, dass

$$S\left[\frac{1}{2}\,s\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x}\,a_{n+x-1}}{a_m\,a_n}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,s\left[\varrho\,\frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{a_n}{a_n} + \varrho^2\,\frac{a_{m+2}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} + \varrho^3\,\frac{a_{m+3}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_n} + \ldots\right]$$

noch dadurch umgeformt werden kann, dass wir a_{n-1} an die Stelle von a_n schaffen. Multipliciren wir Zähler und Nenner mit a_{n-1} und setzen $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ausser Klammer, so wird

$$S\left(\frac{1}{2}\,s\,\varrho^x\,\frac{a_{m+x}}{a_m}\,\frac{a_{n+x-1}}{a_n}\right)$$
$$= \frac{a_{n-1}}{a_n}\,\frac{1}{2}\,s\left(\varrho\,\frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}} + \varrho^2\,\frac{a_{m+2}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,s\,\frac{a_{n-1}}{a_n}\,r_{m,(n-1)},$$

indem wir uns in's Gedächtniss zurückrufen, dass der in Klammer stehende Ausdruck eine Verbindungsrente für zwei Personen des Alters m und $(n-1)$ vorstellt. Auf dieselbe Weise ist, wenn wir m mit n vertauschen

$$S\left(\frac{1}{2}\,s\,\varrho^x\,\frac{a_{n+x}}{a_n}\,\frac{a_{m+x-1}}{a_m}\right) = \frac{1}{2}\,s\,\frac{a_{m-1}}{a_m}\,r_{n,(m-1)},$$

Digitized by Google

so dass der ganze zweite Theil durch

$$S\left(\frac{1}{2}\,s\,\varrho^2\,\frac{a_{m+x}\,a_{n+x-1}-a_{m+x-1}\,a_{n+x}}{a_m\,a_n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\,s\,\frac{a_{n-1}}{a_n}\,r_{m,n-1}-\frac{1}{2}\,s\,\frac{a_{m-1}}{a_m}\,r_{n,m-1}$$

dargestellt ist.

Setzen wir endlich die einzelnen Theile zusammen, so wird

(1) $$S\,[s\,\varrho^x\,p_x]$$
$$=\frac{1}{2}\,s\left(\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n}+\frac{a_{n-1}}{a_n}\,r_{m,n-1}-\frac{a_{m-1}}{a_m}\,r_{n,m-1}\right),$$

der gegenwärtige Werth der Versicherungssumme von s fl. unter der Bedingung, dass A den B überlebt.

Auf die nämliche Weise erhalten wir

(2) $$S\,[s\,\varrho^x\,p'_x]$$
$$=\frac{1}{2}\,s\left(\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n}+\frac{a_{m-1}}{a_m}\,r_{n,m-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n}\,r_{m,n-1}\right),$$

wenn ausbedungen ist, dass B den A überlebe, welches Resultat unmittelbar aus dem vorigen hervorgeht, wenn wir m mit n vertauschen [1]).

Addiren wir endlich die Resultate **(1)** und **(2)**, so erhalten wir eine Versicherung auf das Leben des Erststerbenden, nämlich

(3) $$s\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n}],$$

was mit §. 68 Gleichung **(2)** übereinstimmt, wie es auch sein muss.

Beispiel. Was ist eine Versicherung auf 1000 fl. für eine 20jährige Person A gegenwärtig werth, zahlbar, wenn A eine 50jährige Person B überlebt?

---

[1]) **Bally**, Theorie der Leibrenten, gibt eine ähnliche Formel, jedoch ohne die Symmetrie in Beziehung auf A und B bemerkt zu haben, so dass es bei ihm auch nicht möglich ist, aus der für A gefundenen Formel jene für B durch Vertauschung ihres Alters abzuleiten.

Digitized by Google

Nach Deparcieux und $3^1/_2\%$ Zinsen ist wegen

$$m = 20 \text{ und } n = 50,$$

$$\frac{a_{m-1}}{a_m} = \frac{a_{19}}{a_{20}} = \frac{5608}{5558}, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{49}}{a_{50}} = \frac{4021}{3964},$$

$$r_{20,\,50} = 11{,}873, \qquad \varrho = 0{,}96618$$

$$r_{20,\,49} = 12{,}129, \qquad 1-\varrho = 0{,}03381$$

$$r_{19,\,50} = 11{,}895, \quad \varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n} = 0{,}56476$$

und nach Gleichung **(1)**

$$S\,[s\,\varrho^x\,p_x] = \frac{1}{2}1000\left(0{,}56476 + \frac{4021}{3964}12{,}129 - \frac{5608}{5558}11{,}895\right)$$

$$= \frac{1}{2}1000\,[0{,}56476 + 12{,}30841 - 12{,}00201]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 866{,}16 = 433{,}08 \text{ fl.}$$

$$= 433 \text{ fl. } 4^4/_5 \text{ kr.}$$

§. 77.

Bestimmung der jährlichen Prämien.

Will A den B oder B den A überleben, so wird in beiden Fällen die jährliche Prämie b nur so lange gezahlt, als Beide am Leben sind. Die Summe aller Prämien ohne die erste ist daher für die Anstalt eine Verbindungsrente für zwei Leben von jährlich b fl. (§. 47) und durch

$$b + b\,r_{m,n}$$

ausgedrückt, so dass wir zur Bestimmung von b die Gleichung

(1)
$$b\,(1 + r_{m,n})$$
$$= \frac{1}{2}\,s\left(\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\,r_{m,n-1} - \frac{a_{m-1}}{a_m}\,r_{n,m-1}\right),$$

oder auch

(2)
$$b\,(1+r_{m,n})$$
$$= \frac{1}{2}\,s\left(\varrho-(1-\varrho)\,r_{m,n} + \frac{a_{m-1}}{a_m}\,r_{n,m-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\,r_{m,n-1}\right)$$

haben, je nachdem A den B oder umgekehrt B den A überleben soll.

Digitized by Google

Beispiel. Welche jährliche Prämie ist zu leisten, damit A nach dem Tode des B 1000 fl. erheben darf, wenn beide im Alter von 20 und 50 Jahren stehen?

Mit Benützung des vorigen Beispiels ist nach Gleichung **(1)**

$$b \times 12{,}873 = 433{,}08 \text{ oder}$$

$$b = \frac{433{,}08}{12{,}873} = 33{,}68 \text{ fl.}$$

$$= 33 \text{ fl. } 40^4/_5 \text{ kr.}$$

§. 78.

Temporäre Ueberlebungsversicherung.

Eine $m$jährige Person A und eine $n$jährige B, lassen ihr Leben in der Weise versichern, dass A die Summe von s fl. erheben darf, falls B innerhalb x Jahre stirbt. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Versicherung?

Den gesuchten Werth erhalten wir aus dem Versicherungswerthe auf Lebenszeit

$$\frac{1}{2} \cdot s \left(\varrho - (1-\varrho) r_{m,n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} r_{m,n-1} - \frac{a_{m-1}}{a_m} r_{n,n-1} \right),$$

indem wir von jedem Theile dieses Ausdruckes den Werth abziehen, welcher einer um x Jahre aufgeschobenen Versicherung auf Lebenszeit gleichkommt.

Für den ersten Theil ist dieses schon ausgeführt, wornach wir haben

$$\frac{1}{2} \cdot s \left[\varrho - (1-\varrho) r_{m,n} - \varrho_{(x-1)} r_{m,n} + {}_x r_{m,n} \right];$$

ferner erhalten wir den früheren Paragraphen zufolge

$$\frac{1}{2} \cdot s \frac{a_{n-1}}{a_n} (r_{m,n-1} - {}_x r_{m,n-1}) \text{ anstatt } \frac{1}{2} \cdot s \frac{a_{n-1}}{a_n} r_{m,n-1},$$

$$\frac{1}{2} \cdot s \frac{a_{m-1}}{a_m} (r_{n,m-1} - {}_x r_{n,m-1}) \text{ anstatt } \frac{1}{2} \cdot s \frac{a_{m-1}}{a_m} r_{m,n-1},$$

Digitized by Google

so dass wir den gesuchten baaren Werth einer Versicherung auf x Jahre durch

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m,n} - \varrho\,(s-1)r_{m,n} + {}_x r_{m,n}] \\ + \frac{1}{2} \cdot s \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} (r_{m,n-1} - {}_x r_{m,n-1}) - \frac{a_{m-1}}{a_m} (r_{n,m-1} - {}_x r_{n,m-1}) \right) \end{cases}$$

darstellen können.

§. 79.

Die Bestimmung der jährlichen Prämie.

Die dem vorigen Falle entsprechende jährliche Prämie ist eine temporäre Verbindungsrente auf x Jahre von jährlich b fl. und nach §. 47 sammt der ersten Prämie durch

$$b + b\,(r_{m,n} - {}_x r_{m,n})$$

ausgedrückt, welcher Ausdruck dem in **(1)** verzeichneten gleich zu setzen ist, woraus dann b jedesmal berechnet werden kann.

§. 80.

Ueberlebungsversicherungen für drei Personen.

Versicherungen auf das gegenseitige Ueberleben dreier Personen, lassen eine solche Mannigfaltigkeit von Combinationen zu, dass die Erörterung derselben uns hier zu weit führen würde. Da in der Praxis nur selten hieher gehörige Fälle vorkommen, so verweisen wir die Interessenten auf Baily, welcher Mehreres hierüber mittheilt.

4. Abtheilung.

Besondere Fälle, welche bei Lebensversicherungen eintreten können.

§. 81.

Rückkauf der Lebenspolice.

Hat eine Person A ihr Leben auf s fl. versichern lassen, so kann der Fall eintreten, dass A seine jährliche Prämie b nach einer Anzahl von Jahren nicht mehr zahlen kann, oder

Digitized by Google

aus irgend welcher Veranlassung seinen Vertrag rückgängig machen will; geschieht diess, so nennt man es Rückkauf der Lebenspolice. Es entsteht nun die Frage, mit welcher Summe kann A beim Austritte von der Anstalt billigerweise entschädigt werden?

Nehmen wir an, A war zur Zeit der Aufnahme

m Jahre alt, und ist

$m+x$ Jahre gegenwärtig

zur Zeit des Austrittes, so dass er x Jahre lang die jährliche Prämie b eingezahlt hat. Dann können wir uns immer vorstellen, eine zweite Person B auch $(m+x)$ Jahre alt, wolle den A ablösen, also statt seiner die jährliche Prämie b fortzahlen. Wollte B sein Leben direct ebenso hoch als A versichern lassen, so müsste er eine höhere jährliche Prämie leisten, als b beträgt. Heissen wir die Prämie, welche B bei der directen Aufnahme leisten müsste

$$b_x,$$

so hat er einen Vortheil von jährlich

$$(b_x - b) \text{ fl.},$$

welchen er dem A zu verdanken und folgerichtig zu vergüten hat.

Weil aber diese Vergütung alle Jahre die nämliche bleibt, so ist die Summe derselben eine Leibrente für eine $(m+x)$jährige Person A oder B von jährlich

$$(b_x - b) \text{ fl.},$$

und durch

(1) $(b_x - b)\, r_{m+x}$ oder durch

(2) $(b_x - b)\,(1+r_{m+x})$

ausgedrückt, je nachdem im Augenblick des Austrittes von A seine Prämie schon gezahlt ist oder nicht.

Diese 2 Werthe lassen sich noch durch Leibrenten ausdrücken, indem wir nach §. 61 u. 69

$$b_x = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\, r_{m+x}]}{r_{m+x}}$$

$$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\, r_m]}{r_m},$$

Digitized by Google

daher auch

$$b_x - b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m+x}]\,r_m - s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]\,r_{m+x}}{r_m\,r_{m+x}},$$

und folglich, wenn man multiplicirt und reducirt,

$$(3) \qquad (b_x - b)\,r_{m+x} = s\,\varrho\left(\frac{r_m - r_{m+x}}{r_m}\right),$$

anstatt des Ausdruckes (**1**) haben; für den zweiten Ausdruck wird nach §. 61

$$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]}{1+r_m},$$

$$b_x = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m+x}]}{1+r_{m+x}},$$

daher auch

$$(b_x - b)\,(1+r_{m+x}) = \frac{-s\,(1+r_{m+x})\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_m] + s\,(1+r_m)\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_{m+x}]}{1+r_m},$$

oder, wenn man multiplicirt und reducirt,

$$(4) \qquad (b_x - b)\,(1+r_{m+x}) = \frac{s\,[r_m - r_{m+x}]}{1+r_m}.$$

Beispiel. Das Leben eines gegenwärtig 40jährigen Mannes A ist auf 1000 fl. seit 15 Jahren versichert. Welche Rückvergütung kann A beanspruchen, wenn er sofort austreten will?

Nach Deparcieux und $3^1/_2\,\%$ Zinsen ist

$$r_m = r_{25} = 18{,}8086, \quad x = 15$$
$$r_{m+x} = r_{40} = 16{,}1233, \quad s = 1000$$
$$r_m - r_{m+x} = 2{,}6853$$

und nach Gleichung (**4**) die Vergütung

$$\frac{s\,[r_m - r_{m+x}]}{1+r_m} = \frac{1000 \times 2{,}6853}{19{,}8086} = 135{,}56 \text{ fl.}$$
$$= 135 \text{ fl. } 33^3/_5 \text{ kr.}$$

Was solche Rückkäufe und Rückvergütungen in Wirklichkeit betrifft, so sind dieselben nach den Statuten der einzelnen

Digitized by Google

Versicherungs-Anstalten verschieden und im Voraus bestimmt, gewöhnlich jedoch beschränkt. Das Resultat der Rechnung dient lediglich nur dazu, das Verhalten der Anstalt den Versicherten gegenüber zu beurtheilen.

§. 82.

Rückkauf der Police durch eine Leibrente.

Anstatt der baaren Rückvergütung kann die Versicherungs-Anstalt eine Leibrente gewähren. Nehmen wir an, eine gegenwärtig $(m+x)$jährige Person A habe ihr Leben vor x Jahren, also im Alter m, auf die Summe von s fl. versichern lassen und bis jetzt die jährliche Prämie b gezahlt. A will nun die Prämie nicht weiter mehr zahlen, sondern mit Verzicht auf die versicherte Summe von s fl. eine seinen bisher eingezahlten Prämien entsprechende Leibrente beziehen. Wie gross wird die Jahresrente s^1 sein?

Bezeichnen wir wie früher mit

k die baare Einzahlung,

so ist k mit dem im vorigen Paragraphen abgeleiteten Werthe aller eingezahlten Prämien gleichbedeutend und demnach

$$k = \frac{s\,[r_m - r_{m+x}]}{1+r_m};$$

es ist aber auch (§. 7)

$$k = s^1 \times r_m,$$

so dass wir die Gleichung haben

$$\textbf{(1)} \qquad s^1 \times r_m = \frac{s\,[r_m - r_{m+x}]}{1+r_m},$$

woraus weiter die gesuchte Jahresrente s^1 folgt

$$\textbf{(2)} \qquad s^1 = \frac{s\,[r_m - r_{m+x}]}{r_m\,(1+r_m)}.$$

Beispiel. Ein gegenwärtig 60jähriger Mann liess vor 30 Jahren sein Leben auf 5000 fl. versichern und will für die während dieser Zeit eingezahlten Prämien von jetzt an eine Leibrente beziehen, wogegen er auf

Digitized by Google

die versicherte Summe verzichtet. Welche Jahresrente kann ihm gewährt werden?

Nach Deparcieux und $3^1/_2\,\%$ Zinsen ist

$$\begin{aligned} r_m &= r_{30} = 18{,}1152 \\ r_{m+x} &= r_{60} = 10{,}0201 \\ \hline r_m - r_{m+x} &= 8{,}0951 \end{aligned}$$

und nach Gleichung (**2**)

$$s^1 = \frac{5000 \times 8{,}0951}{18{,}1152 \times 19{,}1152} = 116{,}88 \text{ fl.}$$

$$s^1 = 116 \text{ fl. } 56 \text{ kr.}$$

Wäre statt des Versicherungs-Kapitals s die jährliche Prämie b gegeben, so ist aus den beiden Gleichungen

$$s^1 = \frac{s\,[r_m - r_{m+x}]}{r_m\,(1+r_m)} \text{ und}$$

$$s = \frac{b\,(1+r_m)}{\varrho - (1-\varrho)\,r_m},$$

die Jahresrente durch

(**3**) $$s^1 = \frac{b\,[r_m - r_{m+x}]}{r_m\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]}$$

ausgedrückt.

§. 83.

Zu- und abnehmende Prämien.

In den bisherigen Betrachtungen wurde die Prämie für eine versicherte Person für jedes Jahr gleich gross berechnet. Nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre es dagegen für die Versicherungs-Anstalt weit zweckmässiger, die jährliche Prämie, wenn nicht für jedes Jahr, so doch für kleine Perioden variabel und zwar in dem Grade abnehmend zu berechnen, als die Wahrscheinlichkeit abnimmt, das nächste Jahr zu erreichen. Aber ganz unzweckmässig und verwerflich ist es, die Prämien zunehmen[1]) zu lassen. In Wirklichkeit werden

[1]) Bei aufgeschobenen Leibrenten kann die Zunahme der Prämien zugelassen werden, besonders wenn die Zahl der Jahre nicht gross ist.

Digitized by Google

daher auch eine gewisse Reihe von Jahren höhere Prämien von den Anstalten verlangt, als sie der Rechnung entsprechen. Durch diesen Ueberschuss über die berechneten Prämien ohne Rücksicht auf Provision erwächst der Anstalt ein Vortheil, welcher besonders jungen Anstalten ohne hinreichenden Sicherheitsfond entweder zum wirklichen Reservefond wird oder doch denselben eine Zeitlang vermehrt.

Dieses Verfahren ist nicht nur zur gegenseitigen Sicherheit geboten, sondern auch von Gründen der Vernunft gerechtfertigt, wenn die Anstalt dafür Sorge trägt, dass die Versicherten wieder schadlos gehalten werden. Dieser letztere wesentliche Punkt kann bei Anstalten, welche nicht auf Gegenseitigkeit gegründet sind, auf zweierlei Weise erreicht werden. Entweder kann die Anstalt nach einer gewissen Reihe von Jahren eine Erhöhung der versicherten Summe, oder eine Verminderung der jährlichen Prämie eintreten lassen. Das Eine oder das Andere kann entweder durch einen normalen Satz, indem die Anstalt ein für alle Mal die Grösse unveränderlich bestimmt, oder dadurch geschehen, dass dem Versicherten ein verhältnissmässiger Gewinn-Antheil zugesichert wird, welcher von vorne herein unbestimmbar erst nach Abrechnung des Verwaltungs-Ausschusses definitiv ermittelt werden kann. Wir wollen nun zunächst eine spätere Ermässigung der jährlichen Prämie der Rechnung unterwerfen.

§. 84.

Prämien-Nachlass nach festgesetzten Procenten.

Um die Sache nicht zu complicirt zu machen, wollen wir nur Eine Person in's Auge fassen und insbesondere annehmen, eine $m$jährige Person A, dessen Leben auf die Summe von s fl. versichert ist, habe anfänglich die jährliche Prämie von b fl. zu zahlen. Wie gross ist nun b zu bestimmen, wenn alle x Jahre eine Erniedrigung von d fl. eintritt, und die Provision der Anstalt vorläufig nicht mit in Anschlag zu bringen ist?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir jede

Digitized by Google

Ermässigung als eine für sich selbstständige Prämie, und ziehen den entsprechenden Werth von dem der fortlaufenden Prämie b ab. Die Summe aller Prämien auf Lebenszeit von jährlich b fl. ist gegenwärtig werth

$$b\,(1+r_m);$$

der gegenwärtig baare Werth aller Prämien auf Lebenszeit von jährlich d fl., welche erst nach x Jahren anheben, ist

$$d \times {}_x r_m = d\,\frac{a_{m+x}}{a_m}\,\varrho^x\,r_{m+x};$$

ebenso jener aller Prämien, welche nach $2x$, $3x$ ... Jahren anheben

$$d \times {}_{2x} r_m = d \times \frac{a_{m+2x}}{a_m}\,\varrho^{2x}\,r_{m+2x},$$

$$d \times {}_{3x} r_m = d \times \frac{a_{m+3x}}{a_m}\,\varrho^{3x}\,r_{m+3x},$$

u. s. w.

Ziehen wir nun diese einzelnen Ermässigungen von dem ersten Werth ab, so erhalten wir

(1) $$b\,(1+r_m) - d\,[{}_x r_m + {}_{2x} r_m + {}_{3x} r_m + \ldots]$$
$$= b\,(1+r_m) - \frac{d}{a_m}\,[a_{m+x}\,\varrho^x\,r_{m+x} + a_{m+2x}\,\varrho^{2x}\,r_{m+2x} + a_{m+3x}\,\varrho^{3x}\,r_{m+3x} + \ldots],$$

als baaren Werth aller eingezahlten Prämien.

Andererseits muss dieser Werth aber auch dem baaren Werthe der versicherten Summe von s fl., nämlich dem Werthe

$$s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]$$

gleichkommen, so dass wir zwischen den 3 Grössen

$$s,\ d \text{ und } b$$

folgende Relation aufstellen können

(2) $$s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]$$
$$= b\,(1+r_m) - d\,[{}_x r_m + {}_{2x} r_m + {}_{3x} r_m + \ldots],$$

woraus dann jede von ihnen sich berechnen lässt, wenn 2 davon gegeben sind.

Digitized by Google

Beispiele. **1**) Ein gegenwärtig 30jähriger Mann lässt sein Leben auf 1000 fl. versichern. Welche jährliche Prämie hat er während der ersten 20 Jahre zu zahlen, damit von dort an eine 10procentige Ermässigung bis auf Lebenszeit eintreten kann?

In diesem Falle ist d der 10te Theil von b, also

$$d = \frac{1}{10}\, b\,;$$

ferner ist wegen

$$x = 20$$

auch Gleichung (**2**) allgemein

(**3**) $$s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m] = b\,(1+r_m) - \frac{1}{10}\, b\; {}_x r_m,$$

also

(**4**) $$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]}{1 + r_m - \frac{1}{10}\,{}_x r_m};$$

und nach Deparcieux und $3^1/_2\,\%$ Zinsen

$$r_m = r_{30} = 18{,}1152,$$
$$\varrho - (1-\varrho)\,r_m = 0{,}401614,$$
$${}_x r_m = \frac{a_{50}}{a_{30}}\,\varrho^{20}\, r_{50} = \frac{3964}{5005}\,\varrho^{20} \times 13{,}2621$$
$$= 4{,}7937;$$

daher

$$b = \frac{1000 \times 0{,}401614}{19{,}1152 - 0{,}4793} = \frac{401{,}614}{18{,}6359},$$
$$b = 21{,}501 \text{ fl.} = 21 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}$$

Auf 100 fl. Versicherung wird ohne Provision

$$d = b' = 2 \text{ fl. } 9 \text{ kr.}$$

2) Ein 30jähriger Mann, dessen Leben auf 1000 fl. versichert ist, zahlt die Prämie von jährlich 21 fl. 30 kr.; weil aber diese Prämie zu hoch gestellt ist, so wird ihm nach 20 Jahren eine Ermässigung d gewährt. Wie gross wird d sein müssen?

Digitized by Google

Nach Gleichung (**2**) ist allgemein

$$s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m] = b\,(1+r_m) - d\,{}_x r_m\,,$$

oder der Prämien-Nachlass

$$d = \frac{b\,(1+r_m) - s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]}{{}_x r_m}\,;$$

und mit Benützung des vorigen Beispiels

$$d = \frac{21{,}5 \times 19{,}1152 - 401{,}614}{4{,}7937} = 2{,}15 \text{ fl.}$$

$$d = 2 \text{ fl. } 9 \text{ kr.}$$

§. 85.

Prämien-Nachlass durch Gewinn-Antheil.

Eine Discussion über den Nachlass durch Gewinn-Antheil ist dadurch erschwert, dass die Grösse des Gewinns sich nicht a priori angeben lässt. Nehmen wir aber an, die Anstalt erfreue sich einer grossen Frequenz und Beliebtheit, so dass nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung die einzelnen momentanen Anomalien sich wieder compensiren, setzen wir ferner voraus, die Prämien seien für jedes Alter nach demselben Principe und nicht willkührlich ohne Rücksicht des Alters erhöht, so lässt sich die Betrachtung so weit vereinfachen, dass die daraus fliessenden Resultate dasselbe Vertrauen verdienen, als die der früheren Paragraphen.

Obgleich der Gewinn von allen Versicherten abhängig ist, so können wir uns dennoch vorstellen, er hänge von Einer Person ab. Denn die Anomalien, dass die Anstalt durch einzelne Versicherte auch Schaden haben wird, werden unsrer Voraussetzung zufolge durch die Anzahl der Versicherten und durch die Länge der Zeit vollständig compensirt; ferner wird der von Allen hervorgebrachte Gewinn nicht gleichheitlich, sondern nach Verhältniss der versicherten Summe vertheilt, woraus sogleich folgt, dass, da kein Alter vor dem andern begünstigt ist, alle diese verschiedenen Personen in Eine einzige ideale Person zusammengefasst gedacht werden können.

Digitized by Google

Diese Auffassung liegt übrigens stillschweigend allen Rechnungen über Leibrenten und Lebensversicherungen zu Grunde. Denn nur unter Anerkennung des Princips der Compensation der Anomalien haben die genannten Rechnungen einen verlässigen Werth.

Demgemäss betrachten wir eine $m$jährige Person und heissen

b die berechnete,

b_1 die von der Anstalt erhöhte Prämie,

so dass $b_1 - b$ den Ueberschuss oder Gewinn der Anstalt ausdrückt. Dieser Ueberschuss bleibt an sich alle Jahre gleich, weil b_1 und b jährlich ungeändert bleiben. Von diesem Gewinn erhält der Versicherte einen gewissen Antheil, welchen wir durch

$$\lambda\,(b_1 - b)$$

ausdrücken wollen, worin λ einen ächten Bruch bezeichnet. Dieser Gewinn pflegt zwar jährlich gerechnet, aber erst nach einem gewissen Zeitraum, gewöhnlich nach 5 Jahren, Eigenthum des Versicherten zu werden, so dass er von diesem Zeitpunct an die Prämie von jährlich

$$b_1 - \lambda\,(b_1 - b)$$

einzahlt.

Betrachten wir jeden Theil gesondert, so beträgt der gegenwärtige Werth aller auf diese Weise eingezahlten Prämien nach den früheren Paragraphen

(1) $$b_1\,(1 + r_m) - \lambda\,(b_1 - b)\,{}_5r_m\,,$$

indem der zweite Theil eine um 5 Jahre aufgeschobene Leibrente von jährlich $\lambda\,(b_1 - b)$ fl. vorstellt. Dieser baare Werth sollte wegen gegenseitiger Billigkeit jenem baaren Werthe gleich sein, welcher durch

$$b\,(1 + r_m) \text{ oder } s\,[\varrho - (1 - \varrho)\,r_m]$$

der Rechnung zu Folge ausgedrückt ist.

Nach unsern Prämissen ist aber die angezeigte Gleichheit unmöglich, weil die Anstalt mit dem Versicherten in den Gewinn sich theilt, und es handelt sich nur noch darum, die Grösse des Gewinnes, oder was dasselbe ist, die Differenz

Digitized by Google

$$(2) \qquad [b_1 (1+r_m) - \lambda (b_1 - b)\, {}_5r_m] - b(1+r_m) = (b_1 - b)\,[1 + r_m - \lambda\, ({}_5r_m)]$$

anzugeben, um daraus zu erkennen, ob es wünschenswerth sei, an der Versicherungs-Anstalt sich zu betheiligen. Der vorstehende Ausdruck lässt sich endgültig nur in einem concreten Falle beurtheilen.

Beispiel. In der Stuttgarter Lebensversicherungs-Anstalt kann man nach der neuesten Abänderung der Statuten mit und ohne Gewinn-Antheil sich versichern. Nehmen wir nun den Fall, es habe ein 30jähriger Mann 80 % Gewinn-Antheil. Welches ist der Ausfall nach Formel (**2**) für ein Versicherungskapital von 100 fl.?

Wählen wir eine 4procentige Verzinsung und die Tabelle von Brune, so ist

$$a_{30} = 8717;\ r_{30} = 16{,}6315;\ \varrho = 0{,}9615;$$
$$a_{35} = 8369;\ r_{35} = 16{,}5621;$$

die jährliche Prämie beträgt laut Tarif

$$b_1 = 2{,}230,$$ die gerechnete $$b = 1{,}492;$$

mithin

$$b_1 - b = 0{,}738.$$

Ferner ist in diesem Falle

$$\lambda = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \text{ und}$$

$$\lambda\ {}_5r_m = \frac{4}{5} \cdot \frac{8369}{8717} \varrho^5 \times 16{,}5621 = 10{,}4533.$$

Es ist daher

$$(b_1 - b)\,[1 + r_m - \lambda\, ({}_5r_m)]$$
$$= 0{,}738 \times (17{,}6315 - 10{,}4533) = 5{,}297 \text{ fl.}$$

Dieses würde, auf die ganze Lebensdauer gleichmässig vertheilt, jährlich etwa 20 kr. betragen, was dann als Beitrag zu den Verwaltungskosten anzusehen ist. Es leuchtet übrigens von selbst ein, dass mit Ausschluss der abnormen Sterbefälle das Ergebniss der Dividende allein von einer geschickten Ver-

Digitized by Google

waltung abhängt und derlei Rechnungen nur geringe Anhaltspuncte gewähren, mit der Wirklichkeit in Uebereinstimmung zu sein. (Man vergleiche die beigefügten Geschäftsergebnisse der Lebensversicherungs-Gesellschaften.)

§. 86.

Prämienvergütung durch Erhöhung der Versicherungssumme in festgesetzten Procenten.

Eine $m$jährige Person A, dessen Leben auf s fl. versichert ist, hat die Prämie von jährlich b_1 fl. zu zahlen, wogegen alle x Jahre die Versicherungssumme s um d fl. zunimmt. Wie gross wird die Erhöhung d sein müssen?

Der baare Werth der Versicherungssumme s ist ausgedrückt durch

$$k = s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m];$$

jener der um x Jahre aufgeschobenen Versicherungssumme von d fl. ist

$$k_x = \frac{d\,\varrho^x\,a_{m+x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m+x}],$$

ebenso ist jener der um $2x$, $3x$.... Jahre aufgeschobenen Versicherungssumme von d fl. ausgedrückt durch

$$k_{2x} = \frac{d\,\varrho^{2x}\,a_{m+2x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m+2x}],$$

$$k_{3x} = \frac{d\,\varrho^{3x}\,a_{m+3x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_{m+3x}]$$

u. s. w.

Der Totalwerth aller Versicherungen ist daher die Summe

$$k + k_x + k_{2x} + k_{3x} + \ldots,$$

welche dem baaren Werthe aller eingezahlten Prämien nämlich

$$b_1\,(1+r_m)$$

gleich sein muss, so dass wir zur Bestimmung von d oder b_1 die Gleichung haben

Digitized by Google

(1) $$b_1 (1+r_m) = s\,[\varrho - (1-\varrho)\, r_m]$$
$$+ \frac{d\,\varrho^x\, a_{m+x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho)\, r_{m+x}]$$
$$+ \frac{d\,\varrho^{2x}\, a_{m+2x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho)\, r_{m+2x}] + \ldots.$$

Beispiele. **1)** Ein 40jähriger Mann ist auf 1000 fl. versichert, und zahlt die jährliche Prämie b_1. Wie gross muss diese Prämie sein, damit alle 20 Jahre die versicherte Summe um 20 % erhöht werden kann?

In diesem Falle ist

$$d = \frac{1}{5}\, s = 200 \text{ fl.}$$

und nach Deparcieux und 3½ % Zinsen ist

$$r_m = r_{40} = 16{,}1233; \quad a_m = a_{40} = 4490;$$
$$\varrho - (1-\varrho)\, r_m = 0{,}469751; \quad a_{m+x} = a_{60} = 3191;$$
$$\varrho - (1-\varrho)\, r_{m+20} = 0{,}666894; \quad a_{m+2x} = a_{80} = 812;$$
$$\varrho - (1-\varrho)\, r_{m+40} = 0{,}861231;$$

es ist daher

$$s\,[\varrho - (1-\varrho) r_m] = 1000 \times 0{,}469751 = 469{,}751,$$
$$\frac{d\,\varrho^x\, a_{m+x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho) r_{m+x}] = \frac{200\,\varrho^{20}\, 3191}{4490} \times 0{,}666894 = 43{,}261,$$
$$\frac{d\,\varrho^{2x}\, a_{m+2x}}{a_m}\,[\varrho - (1-\varrho) r_{m+2x}] = \frac{200\,\varrho^{40}\, 812}{4490} \times 0{,}861231 = 6{,}488$$
$$519{,}500.$$

Mithin ist nach Gleichung **(1)**

$$b_1 = \frac{519{,}5}{1+r_m} = \frac{519{,}5}{17{,}1233} = 30{,}338 \text{ fl.}$$

oder

$$b_1 = 30 \text{ fl. } 20 \text{ kr. } 1 \text{ dl.};$$

wogegen die höchste Versicherungssumme von 1400 fl. zwischen das Alter von 80 Jahren und darüber fällt.

2) Ein 40jähriger Mann lässt sein Leben auf 1000 fl. versichern und zahlt die Prämie von jährlich 30 fl. 20 kr. 1 dl. auf Lebenszeit, wogegen alle 20 Jahre

Digitized by Google

eine gewisse Erhöhung (d) der Versicherungssumme eintritt. Wie gross wird diese Erhöhung sein?

Mit Benützung des vorigen Beispiels haben wir nach Gleichung **(1)**

$$b_1 \times 17{,}1233 = 469{,}751 + d\,[0{,}216305 + 0{,}03244],$$

oder wegen

$$b = 30{,}338,$$

$$d \times 0{,}248745 = 30{,}338 \times 17{,}1233 - 469{,}751,$$

woraus

$$d = \frac{519{,}5 - 469{,}751}{0{,}248745},$$

$$d = \frac{49{,}749}{0{,}248745} = 200 \text{ fl.};$$

was einer Erhöhung von 20 % der ursprünglichen Versicherungssumme gleichkommt.

§. 87.

Erhöhung der Versicherungssumme durch Gewinn-Antheil.

Eine gegenwärtig $m$jährige Person A lässt ihr Leben auf s fl. versichern und zahlt auf Lebenszeit die von der Anstalt festgesetzte Prämie b_1, wogegen die ursprünglich versicherte Summe s durch einen verhältnissmässigen Gewinn-Antheil erhöht wird; und zwar erhält A von dem ganzen auf A treffenden Gewinn

λ Theile,

das Uebrige die Anstalt. Um wie viel wird s im Todesjahre erhöht sein?

Bezeichnen wir mit

$$b = \frac{s\,[\varrho - (1-\varrho)\,r_m]}{1 + r_m}$$

die der Rechnung entsprechende Prämie, so ist der jährliche Gewinn-Antheil des A

$$\lambda\,(b_1 - b),$$

Digitized by Google

welcher als jährliche Prämie für sich betrachtet werden kann; die Anstalt hingegen nimmt jährlich

$$(1-\lambda)\,(b_1-b)$$

für sich. Diese beiden Prämien haben einen gegenwärtig baaren Werth von

$$\lambda\,(b_1-b)\,(1+r_m) \text{ und } (1-\lambda)\,(b_1-b)\,(1+r_m).$$

Bezeichnen wir ferner mit

s_1 den Zuwachs der Versicherung,

so haben wir aus der Gleichung

$$\lambda\,(b_1-b)\,(1+r_m) = s_1\,[\varrho-(1-\varrho)\,r_m),$$

$$\textbf{(1)} \qquad s_1 = \frac{\lambda\,(b_1-b)\,(1+r_m)}{\varrho-(1-\varrho)\,r_m};$$

während die Anstalt sich selbst auf s_2 versichert, welche Summe durch

$$\textbf{(2)} \qquad s_2 = \frac{(1-\lambda)\,(b_1-b)\,(1+r_m)}{\varrho-(1-\varrho)\,r_m}$$

ausgedrückt ist. Die Gleichung (**1**) drückt zwar nicht die Erhöhung aus, wie diese nach dem Tode sich definitiv entziffern wird, sondern nur den Erwartungswerth oder die mathematische Hoffnung auf Gewinn-Antheil. Die Gleichung (**2**) dient dazu, den Vortheil zu beurtheilen, welchen die Anstalt an den Versicherten nimmt.

Beispiel. Ein 30jähriger Mann lässt sein Leben auf 100 fl. versichern. Die Anstalt fordert 2 fl. 40 kr. als jährliche Prämie auf Lebenszeit und gewährt $^2/_3$ oder $66^2/_3\,\%$ Gewinn-Antheil. Um wie viel wird sich dadurch die ursprüngliche Versicherungssumme erhöhen?

Nach Deparcieux und $3^1/_2\,\%$ Zinsen ist die berechnete Prämie

$$b = 1{,}8498;\ \lambda = {}^2/_3;$$

folglich

$$b_1-b = 2{,}6666-1{,}8494$$
$$= 0{,}8172;$$

Digitized by Google

und nach Gleichung (**2**)

$$s_1 = \frac{^2/_3 \,.\, 0{,}8172 \times 18{,}1152}{0{,}401614} = 24{,}574 \text{ fl.}$$

$$s_1 = 24 \text{ fl. } 34 \text{ kr. } 2 \text{ dl.};$$

während die Anstalt sich auf

12 fl. 17 kr. 1 dl.

versichert. Wollen wir dieses in Procenten im gewöhnlichen Sinne ausdrücken, so ist aus der Proportion

$$124{,}574 : 100 = 12{,}287 : x$$

$$x = \frac{1228{,}7}{124{,}574} = 9{,}863 \text{ fl.}$$

also $9^4/_5\,\%$, d. h. während die Anstalt das Leben einer Person auf 100 fl. versichert, ist sie selbst mit 9 fl. 51 kr. versichert, was ihren Gewinn ausmacht, weil sie keine Prämien zahlt. Dabei ist aber nicht zu vergessen, dass der obige Gewinn-Antheil sich thatsächlich niederer stellen wird, weil vorerst die Verwaltungskosten abgezogen werden, und der Versicherte nur am reinen Gewinne Antheil hat. Demzufolge sind von dem obigen Resultate schlüsslich noch die Verwaltungskosten in Abzug zu bringen.

§. 88.

Berechnung des Reservefonds.

Zur gedeihlichen Entwicklung einer Versicherungs-Anstalt hat die Verwaltung derselben vornehmlich auf zwei Puncte zu sehen. Einerseits ist erforderlich, dass alles disponible Kapital neben hinreichender Sicherheit so gut verzinslich als möglich angelegt werde; andererseits hat die Verwaltung aber auch dafür Sorge zu tragen, dass sie die übernommenen Verpflichtungen in Todesfällen zu erfüllen im Stande ist. Dazu ist erforderlich, dass sie die während eines Verwaltungsjahres wahrscheinlichen Todesfälle berechnen und die entsprechenden Summen bereithalte.

Digitized by Google

Die dessfallsigen Rechnungen sind zwar etwas umständlich, aber keineswegs schwierig. Indess müssen wir bemerken, dass der den wahrscheinlichen Todesfällen entsprechende Reservefond heut zu Tage nicht mehr dieselbe Bedeutung hat, als sonst, und dass schon eine approximative Bestimmung desselben hinreicht. Denn seit Errichtung der Credit-Anstalten und Credit-Banken kann sich überhaupt Jeder, der im Besitze von Werth-Papieren und Werth-Effecten ist, in kurzer Zeit baares Geld verschaffen, falls er sich in momentaner Verlegenheit befindet.

Nehmen wir nun an, es werde der Anstalt ein Todesfall gemeldet, und dieselbe sei ohne hinlänglichen Baarvorrath, so hat sie in jedem Falle einen Termin von 3 bis 4 Monaten. Während dieser Zeit ist es ihr ein Leichtes, durch Vermittlung einer Credit-Anstalt den Baarvorrath zu ergänzen. Dabei ist offenbar nur das entscheidend, ob es vortheilhafter ist, baares Geld unverzinslich in der Kasse zu lassen, oder dasselbe theilweise verzinslich anzulegen und im Nothfalle gegen Vergütung sich baares Geld zu verschaffen.

Zur Berechnung des Reservefonds ist das Verzeichniss der Mitglieder sammt den Versicherungskapitalen nothwendig. Ist eine $m$jährige Person mit s fl. versichert, so ist der Erwartungswerth, dass s innerhalb des Verwaltungsjahres fällig wird durch

$$s \times \left(1 - \frac{a_{m+1}}{a_m}\right)$$

ausgedrückt. Berechnet man vorstehenden Werth für jede versicherte Person, und summirt alle diese Partialwerthe, so ist die so erhaltene Summe diejenige, welche die Verwaltung vorräthig haben soll, und mit dem Namen Reservefond bezeichnet ist. Es kommt also hier hauptsächlich auf den Ausdruck der Wahrscheinlichkeit an, dass der versicherte Fall eintritt oder nicht. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für alle üblichen Versicherungsarten glauben wir in dem Vorausgegangenen hinlänglich gezeigt zu haben. Uebrigens ist nicht

Digitized by Google

zu übersehen, dass die Rechnung mit der Wirklichkeit nur dann befriedigend übereinstimmen wird, wenn die Anzahl der Versicherten eine sehr grosse ist.

5. Abtheilung.

Ueber den Stand der deutschen Lebensversicherungs-Anstalten.

§. 89.

Grundlagen des deutschen Versicherungswesens.

In dem bis jetzt Vorgetragenen wurde nur auf die in der Praxis vorkommenden Versicherungsarten Rücksicht genommen und gezeigt, wie die entsprechenden Berechnungen vom theoretischen Standpuncte gelöst werden müssen. Es erübrigt demnach noch, auf die bis jetzt gegründeten Anstalten selbst einen Blick zu werfen und sie in Gesammtheit kennen zu lernen.

Wie schon Eingangs bemerkt, sind die deutschen Lebensversicherungs-Anstalten sämmtlich erst in neuester Zeit entstanden. Die Gründung der ältesten derselben reicht nicht weiter als bis zum Jahre 1827 zurück, so dass die Anstalten Englands ein ganzes Jahrhundert älter sind. Seitdem sind sie aber in ununterbrochener Entwicklung fortgeschritten und zu einer solchen Blüthe und Entfaltung gediehen, wie in keinem andern Lande, mit Ausnahme von England. Durch zahlreiche Schriften wurde die anfängliche Theilnahmslosigkeit und Unkenntniss des Publicums von diesen wichtigen Anstalten überwunden und Vertrauen in die Solidität derselben gebracht. Die Anstalten haben aber auch ihrerseits das Vertrauen und die Hoffnungen des Publicums weder getäuscht, noch zu selbstsüchtigen und verwerflichen Absichten missbraucht. Nur zwei Anstalten sind unsres Wissens bald nach ihrer Gründung in den Fluthen der Ereignisse untergegangen. Dagegen erhob sich auf den Ruinen der Einen eine neue, welche bald zu den besten zu zählen verspricht.

Digitized by Google

Mit Stolz und Befriedigung können wir auf das Wirken der deutschen Lebensversicherungs-Anstalten blicken, welche — fern von jeder Schwindelei — deutsche Ehrlichkeit auf ihrem Banner tragen!

Dem rascheren Gedeihen sind die politischen Schranken ein grosses Hinderniss. Will eine Anstalt ihre Wirksamkeit über die Landesgrenzen hinaus erstrecken, so ist jedesmal eine besondere Concession oder Zulassung seitens der Staatsregierung erforderlich, welche gar häufig verweigert wird. Dieses gilt namentlich von Oesterreich, welches, vielleicht aus Furcht der Concurrenz, bis jetzt noch keiner ausländischen Anstalt eine öffentliche Agentur gewährt hat. Aber gleichwohl betragen die Versicherungen in ganz Oesterreich kaum mehr, als die Gothaer Versicherungs-Bank allein Versicherte zählt.

Hinsichtlich der Grundlagen, auf welchen diese Anstalten beruhen, können wir 3 Arten unterscheiden. Sie sind entweder

1) auf Actien gegründet, wobei nur allein der Actienbesitzer Mitinhaber der Anstalt ist; oder
2) auf Gegenseitigkeit, wobei nur der Versicherte Theilhaber an der Anstalt ist, also auch Gewinn und Verlust mitzutragen hat; oder
3) sie sind gemischte Anstalten in der Art, dass die Versicherten nur theilweise Actionäre sind und daher nur einen gewissen, statutenmässig festgesetzten Dividenden-Antheil haben.

Zur ersten Art gehören:

Die Versicherungs-Anstalten zu Lübeck (nach den älteren Statuten), Triest, Berlin (nach den älteren Statuten), München, Frankfurt, Gesellschaft Janus in Hamburg, Azienda in Triest, Teutonia in Leipzig, Reunione in Triest, Concordia in Cöln, Iduna in Halle.

Digitized by Google

Zur zweiten Art gehören:

Die Lebensversicherungs-Gesellschaften in Gotha, Leipzig und Hannover, die Capital- und Renten-Gesellschaft in Wien, die allgemeine Versicherungs-Gesellschaft in Braunschweig und Stuttgart, jene in Darmstadt.

Zur dritten Art gehören:

Die Lebensversicherungs-Bank in Lübeck (nach den neueren Statuten), jene in Berlin seit 1854 und jene in Schwerin etc.

Ob nun die Grundlage der einen vorzüglicher sei als die der andern, lässt sich principiell gar nicht entscheiden — es kann die eine so solid sein, als die andere — sondern es hängt dieses theils von der Gesammtgarantie der Anstalt, theils von der Höhe des Prämien-Tarifes ab.

Unter Vergleichung der bestehenden Tarife dürften die auf Gegenseitigkeit gegründeten Anstalten den Vorzug haben. Wir haben schon früher einmal erwähnt, dass es zur gegenseitigen Sicherheit im Interesse der Anstalt liegt, anfangs höhere Prämien zu fordern und diese Erhöhung auf eine entsprechende Weise später wieder zu vergüten. Bei Anstalten auf Gegenseitigkeit kann dieses durch Dividenden-Vertheilung sehr wohl erreicht werden.

Bis zum Jahre 1858 bestanden 26 deutsche Lebensversicherungs-Anstalten, deren Gründung einen Zeitraum von bloss 30 Jahren umfasst, eine Thatsache, welche am deutlichsten zeigt, wie lebhaft das deutsche Volk die hohe Bedeutung derselben erfasst und als Bedürfniss erkannt hat. Auch scheint es noch keineswegs gewiss, dass mit der Zahl 26 ihr Kreis schon abgeschlossen ist, wir dürfen vielmehr auf eine weitere Vermehrung schliessen.

Um sich einen Begriff von ihrer Wirksamkeit zu machen, können wir die versicherten Personen aller Anstalten etwa auf 110000 mit einem Versicherungs-Capitale von beiläufig 115 Millionen Thaler schätzen. Ist auch diese Anzahl im Ver-

Digitized by Google

hältniss zur Gesammt-Bevölkerung klein zu nennen, so zeigen alle Anstalten, welche bis jetzt Rechenschafts-Berichte veröffentlicht haben, ohne Ausnahme eine stetige Zunahme, die zu der Hoffnung berechtigt, dass dieses Verhältniss bald in einem günstigeren Lichte auftreten wird.

Zur näheren Einsicht theilen wir nachstehend eine übersichtliche Zusammenstellung der Geschäfts-Ergebnisse dieser Anstalten mit. Jene Anstalten, welche nicht mit aufgeführt sind, haben bis jetzt noch keinen Rechenschafts-Bericht veröffentlicht. Diese Veröffentlichung wird ihnen aber kaum erspart bleiben, wenn sie auf Theilnahme rechnen wollen. Jede Zurückhaltung ist hier am unrechten Platze. Denn einerseits lässt sich den übrigen Anstalten gegenüber auf diese Weise keine Concurrenz machen, andererseits geht durch Nichtveröffentlichung der gemachten Erfahrungen schätzbares Material für die wissenschaftliche Statistik verloren.

Wahre Muster solcher Berichte haben die Anstalten in Gotha und Stuttgart veröffentlicht; möchten auch die übrigen Anstalten ihrem Beispiele folgen, und recht bald in ihrem eigenen und im Interesse Anderer authentische Berichte veröffentlichen!

Digitized by Google

§.

Geschäfts-Ergebnisse und Zustand der deutschen

Nro.	Name der Anstalt	Sitz derselben	Jahr der Gründung	Versicherungsbestand am Ende des Jahres	
				Personen	Thaler
1	Lebensversich.-Bank für Deutschland	Gotha	1827	22109	35884500
2	Deutsche Lebensv.-Ges..	Lübeck	1828	10105	9096026
3	Leipziger Lebensv.-Ges.	Leipzig	1830	5146	5715600
4	Hannover'sche Lebensv.-Gesellschaft	Hannover	1830	2878	1788900
5	Assicurazione Generali Austro-italiche	Triest	1834	7300	11642026
6	Berlinische Lebensv.-G..	Berlin	1836	8560	10722800
7	Lebensversich.-Anstalt .	München	1836	2706	2102800
8	Allg. wechselseitige Cap.- u. Rentenvers.-Ges. . .	Wien	1839	11158	3263379
9	Allgem. Versich.-Anstalt	Braunschweig	1842	1170	648400
10	Frankfurter Lebensv.-G.	Frankfurt	1844	1691	2333953
11	Lebens- u. Pensionsversich.-Ges. Janus	Hamburg	1847	7610	5927847
12	Allgem. Renten-, Cap.- u. Lebensv.-Ges. Teutonia	Leipzig	1852	4621	932735
13	Cölnische Lebensversich.-Gesellschaft Concordia.	Cöln	1853	5600	8675154
14	Lebensv.- u. Spar-Bank .	Schwerin	1853	396	517900
15	Lebensvers.-, Pensions- u. Leibrenten-Versich.-Gesellschaft Iduna . . .	Halle	1854	2492	1703710
16	Lebensv.- u. Sparbank .	Stuttgart	1854	2404	2727576
17	Lebensvers.-Anstalt der allgem. Renten-Anstalt.	Darmstadt	1855	1166	500091
18	Magdeburger Lebensversicherungs-Gesellsch. .	Magdeburg	1856	1731	2094364
19	Lebensversich.-Actien-Gesellschaft Germania.	Stettin	1857	2400	3409489
20	Schweizer Renten- und Lebensvers.-Anstalt . .	Zürich	1857	515	784651

Digitized by Google

90.

Lebensversicherungs-Gesellschaften im Jahre 1859.

Verwaltungsaufwand			Durchschnitt der Dividende für die Versicherten in den letzten 10 Jahren in % der Prämie	Actien-Capital	
absolut Thaler	in % der Jahres-Einnahme	in ‰ der Versicherungssumme		Nominell	Baar eingezahlt
67521	4,02	1,88	28,2	gegenseitig	gegenseitig
23084	6,29	2,54	0,25	5100000	51000
16754	6,20	2,93	18,50	gegenseitig	gegenseitig
?	?	?	—	gegenseitig	gegenseitig
?	?	?	—	2940000	?
40000	7,65	3,73	14,50	1000000	2000
?	?	?	—	die Fonds der Hypoth.- und Wechselbank	
15000	11,89	4,60	13,66	gegenseitig	gegenseitig
?	?	?	6,00	gegenseitig	gegenseitig
15096	11,67	6,47	7,60	1714285	171428
23277	15,58	5,61	7,66	500000	50000
12471	28,38	13,37	—	600000	90000
?	?	?	—	6088000	1217600
?	?	?	—	100000	1000
25112	29,36	14,74	—	200000	?
?	?	?	44,50	gegenseitig	gegenseitig
?	?	?	—	die Fonds der Renten-Anstalt	
31592	31,87	15,08	—	1974000	394800
39187	31,06	11,49	—	3000000	600000
?	?	?	—	die Fonds der Credit-Anstalt	

Digitized by Google

§.

Prämien der deutschen Lebens-

für 100 Thaler zahlbar beim Todesfalle, nach den Erfahrungen der

Gesellschaft	Jahr der Gründung	Durchschnitt der Dividende für die Versicherten in den letzten 10 Jahren in % der Prämie	Prämie des Alters 25			Prämie des Alters 30		
			Brutto	Dividende	Netto	Brutto	Dividende	Netto
Gotha	1827	28	2,356	0,660	1,696	2,633	0,737	1,896
Lübeck (neuer Tarif)	1828	—	—	—	1,828	—	—	2,106
Leipzig.	1830	16,5	2,356	0,389	1,967	2,633	0,434	2,199
Triest	1834	keine	—	—	2,14	—	—	2,42
Berlin (Tarif 1854)	1836	keine	—	—	2,00	—	—	2,283
München. . . .	1836	keine	—	—	2,167	—	—	2,433
Wien	1839	13 ungefähr	2,150	0,279	1,871	2,483	0,323	2,160
Braunschweig .	1842	6 „	2,125	0,127	1,998	2,382	0,143	2,239
Frankfurt a/M..	1844	keine	—	—	1,992	—	—	2,242
Hamburg, Janus	1847	keine	—	—	1,950	—	—	2,225
Triest, Azienda.	1851	keine	—	—	2,12	—	—	2,40
Wien	1852	keine	—	—	2,100	—	—	2,383
Leipzig, Teutonia	1852	keine	2,181	?	?	2,500	?	?
Triest, Reunione	1853	keine	—	—	1,96	—	—	2,25
Cöln, Concordia.	1853	keine	—	—	1,783	—	—	2,042
Schwerin . . .	1853	2 (beständig)	2,203	?	?	2,521	?	?
Halle, Iduna . .	1854	keine	2,192	?	?	2,500	?	?
Stuttgart. . . .	1854	keine	2,230	?	?	2,457	?	?
Darmstadt . . .	1855	keine	—	—	1,750	—	—	2,017
Magdeburg . .	1856	keine	—	—	1,867	—	—	2,083
Erfurt	1856	keine	—	—	1,758	—	—	2,008
Stettin, Germania	1857	keine	—	—	1,817	—	—	2,075
Frankfurt (M.), Providentia . .	1857	keine	—	—	1,883	—	—	2,125
Zürich	1857	keine	—	—	2,174	—	—	2,439
Triest, Nouva soc. commerciale . .	1857	keine	—	—	2,050	—	—	2,330
Wien, Anker . .	1858	keine	—	—	1,920	—	—	2,240

Digitized by Google

91.

Versicherungs-Gesellschaften

letzten 10 Jahre zusammengestellt von Director Hopf in Gotha.

Prämie des Alters 35			Prämie des Alters 40			Prämie des Alters 45			Prämie des Alters 50		
Brutto	Dividende	Netto	Brutto	Dividende	Netto	Brutto	Dividende	Netto	Brutto	Dividende	Netto
2,969	0,831	2,138	3,386	0,948	2,438	3,961	1,109	2,352	4,733	1,325	3,408
—	—	2,461	—	—	2,928	—	—	3,564	—	—	4,417
2,969	0,490	2,479	3,866	0,641	3,245	3,961	0,654	3,307	4,733	0,781	5,952
—	—	2,76	—	—	3,21	?	—	3,81	—	—	4,66
—	—	2,658	—	—	3,150	—	—	3,758	—	—	4,558
—	—	2,750	—	—	3,183	—	—	3,750	—	—	4,517
2,883	0,375	2,508	3,333	0,433	2,900	3,950	0,513	3,437	4,733	0,615	4,118
2,722	0,165	2,557	3,187	0,191	2,996	3,805	0,228	3,577	4,660	0,280	4,380
—	—	2,550	—	—	2,950	—	—	3,483	—	—	4,192
—	—	2,542	—	—	2,950	—	—	3,425	—	—	4,100
—	—	2,76	—	—	3,24	—	—	3,84	—	—	4,64
—	—	2,717	—	—	3,167	—	—	3,767	—	—	4,550
2,861	?	?	3,300	?	?	3,900	?	?	4,667	?	?
—	—	2,57	—	—	2,99	—	—	3,62	—	—	4,35
—	—	2,383	—	—	2,825	—	—	3,417	—	—	4,208
2,906	?	?	3,391	?	?	4,005	?	?	4,802	?	?
2,861	?	?	3,317	?	?	3,850	?	?	4,600	?	?
2,760	?	?	3,182	?	?	3,757	?	?	4,572	?	?
—	—	2,350	—	—	2,800	—	—	3,433	—	—	4,300
—	—	2,358	—	—	2,758	—	—	3,333	—	—	4,108
—	—	2,333	—	—	2,750	—	—	3,317	—	—	4,083
—	—	2,408	—	—	2,842	—	—	3,417	—	—	4,192
—	—	2,425	—	—	2,821	—	—	3,396	—	—	4,167
—	—	2,778	—	—	3,226	—	—	3,846	—	—	4,545
—	—	2,660	—	—	3,100	—	—	3,710	—	—	4,500
—	—	2,550	—	—	2,990	—	—	3,600	—	—	4,390

Digitized by Google

Gesellschaft	Jahr der Gründung	Durchschnitt der Dividende für die Versicherten in den letzten 10 Jahren in % der Prämie	Prämie des Alters 55			Prämie des Alters 60		
			Brutto	Dividende	Netto	Brutto	Dividende	Netto
Gotha	1827	28	5,742	1,608	4,134	7,161	2,005	5,156
Lübeck (neuer Tarif)	1828	—	—	—	5,561	—	—	8,133
Leipzig.	1830	16,5	5,742	0,947	4,795	7,161	1,182	5,979
Triest	1834	keine	—	—	5,78	—	—	7,25
Berlin (Tarif 1854)	1836	keine	—	—	5,650	—	—	7,142
München. . . .	1836	keine	—	—	5,533	—	—	6,933
Wien	1839	13 ungefähr	5,667	0,737	4,930	7,967	0,906	6,061
Braunschweig .	1842	6 „	5,854	0,351	5,503	7,479	0,449	7,030
Frankfurt a/M..	1844	keine	—	—	5,142	—	—	6,422
Hamburg, Janus	1847	keine	—	—	5,125	—	—	6,492
Triest, Azienda.	1851	keine	—	—	5,70	—	—	7,23
Wien.	1852	keine	—	—	5,633	—	—	7,183
Leipzig, Teutonia	1852	keine	5,624	?	?	6,833	?	?
Triest, Reunione	1853	keine	—	—	5,55	—	—	7,07
Cöln, Concordia.	1853	keine	—	—	5,267	—	—	6,692
Schwerin . . .	1853	2 (beständig)	5,906	?	?	7,661	?	?
Halle, Iduna . .	1854	keine	5,750	?	?	7,200	?	?
Stuttgart. . . .	1854	keine	5,688	?	?	7,077	?	?
Darmstadt. . .	1855	keine	—	—	5,550	—	—	7,317
Magdeburg . .	1856	keine	—	—	5,003	—	—	6,300
Erfurt	1856	keine	—	—	5,267	—	—	6,717
Stettin, Germania	1857	keine	—	—	5,208	—	—	6,592
Frankfurt (M), Providentia . .	1857	keine	—	—	5,212	—	—	6,671
Zürich	1857	keine	—	—	5,556	—	—	7,143
Triest, Nouva soc. commerciale . .	1857	keine	—	—	5,660	—	—	7,160
Wien, Anker . .	1858	keine	—	—	5,430	—	—	6,830

Digitized by Google

§. 92.

Die Erfahrungen der Lebensversicherungs-Bank in Gotha.

Von allen deutschen Lebensversicherungs-Banken nimmt bis jetzt jene in Gotha an Umfang, Ausdehnung und Organisation die erste Stelle ein. Der dortige Director Dr. Hopf hat über die Erfahrungen der ersten 25 Jahre einen ausführlichen und höchst interessanten Bericht veröffentlicht, welchem wir nachstehenden Auszug verdanken.

Versicherungen bei der Lebensversicherungs-Bank in Gotha vom Jahre 1829 bis 1853.

Jahr	Angemeldet Personen	Neu versichert	Im Ganzen versichert	Abgegangen			Reiner Zuwachs	Bestand am Ende des Jahres
				durch Ablauf, Austritt	durch Tod	Summe		
1829	1581	1285	1285	—	12	12	1273	1273
1830	607	504	1777	14	16	30	474	1747
1831	1491	1244	2991	46	27	73	1171	2918
1832	1574	1165	4083	212	55	267	898	3816
1833	1351	1041	4857	120	46	166	875	4691
1834	1218	902	5593	154	67	221	681	5372
1835	1318	989	6361	155	86	241	748	6120
1836	1635	1213	7333	170	110	280	933	7053
1837	1581	1151	8204	170	127	297	854	7907
1838	1555	1154	9061	156	126	282	872	8779
1839	1419	1024	9803	195	127	322	702	9481
1840	1485	1089	10570	193	143	336	753	10234
1841	1414	983	11217	178	164	342	641	10875
1842	1352	1013	11888	167	198	365	648	11523
1843	1503	1049	12572	193	203	396	653	12176
1844	1493	1073	13249	183	200	383	690	12866
1845	1412	1018	13884	178	238	416	602	13468
1846	1484	1096	14564	208	230	438	658	14126
1847	1706	1235	15361	240	293	533	702	14828
1848	1151	824	15652	277	339	616	208	15036
1849	1377	1011	16047	239	337	576	435	15471
1850	1537	1138	16609	196	331	529	609	16080
1851	1667	1262	17344	190	299	487	775	16855
1852	1868	1423	18278	217	346	563	860	17715
1853	1808	1324	19039	213	399	612	712	18427

Digitized by Google

Daraus sieht man, dass die Zunahme der Versicherten in stetem Wachsen begriffen ist und eine Höhe zu erreichen verspricht, welche zu den besten Hoffnungen berechtigt. Andere Anstalten sind im Vergleich mit der gothaischen in der Zahl der Mitglieder bedeutend zurückgeblieben, auch mit Rücksicht auf ihre spätere Gründung.

Von besonderem Interesse für uns ist der Vergleich der beobachteten Sterblichkeit mit der vermöge der benützten Sterblichkeits-Tabelle aufgestellten, wornach die Prämien-Tarife berechnet wurden. Das Ergebniss ist folgendes:

Sterbefälle unter den Versicherten der Lebensversicherungs-Bank in Gotha von 1829 bis 1853.

Jahr	Es starben		Zu erwarten nach der Sterblichkeits-Tafel		Unterschied			
					Es starben mehr		Es starben weniger	
	Pers.	Thlr.	Pers.	Thlr.	Pers.	Thlr.	Pers.	Thlr.
1829	12	15100	15,19	27979	—	—	3,19	12879
1830	16	34300	22,84	43688	—	—	6,84	9388
1831	27	50300	32,38	63254	—	—	5,38	12954
1832	53	102300	50,25	94681	2,75	7619	—	—
1833	46	71032	64,81	117700	—	—	18,81	46668
1834	65	108300	77,19	135909	—	—	12,19	27609
1835	85	165400	89,34	156092	—	—	4,34	9308
1836	108	179200	103,42	178234	4,58	966	—	—
1837	123	217417	117,99	202162	5,01	15255	—	—
1838	124	211900	133,88	228054	—	—	9,88	16154
1839	123	206400	149,74	254226	—	—	26,74	47826
1840	136	256200	164,25	276936	—	—	28,25	20736
1841	158	278525	179,02	299402	—	—	21,02	20877
1842	191	300800	193,93	322746	—	—	2,93	21946
1843	201	323800	208,55	345219	—	—	7,55	21419
1844	197	340400	224,81	370748	—	—	27,81	30348
1845	235	381200	241,13	397277	—	—	6,13	16077
1846	224	353800	257,03	421986	—	—	33,03	68186
1847	289	470000	275,53	450174	13,47	19826	—	—
1848	326	496500	290,27	474505	35,73	21995	—	—
1849	335	566500	302,28	494798	32,72	71702	—	—
1850	326	556600	318,57	520490	7,43	36110	—	—
1851	293	459000	337,52	550166	—	—	44,52	91166
1852	335	554900	359,54	584449	—	—	24,54	29549
1853	390	633600	382,07	618850	7,93	14750	—	—
	4418		4591,53		109,62	197531	283,15	493782

Digitized by Google

An diese Tabelle lassen sich sehr wichtige Bemerkungen knüpfen. In 25 Rechnungsjahren hatte die Bank nur 8mal Verlust im Betrage von 197531 Thaler, und 17mal Gewinn im Betrage von 493782 Thaler, ohne Rücksicht auf Verwaltungskosten. Der Ueberschuss des Gewinns über den Verlust beträgt somit 493782 — 197531 = 296251 Thaler.

Schon früher hatten wir gelegentlich bemerkt, dass allgemeine Sterblichkeits-Tafeln, streng genommen, für Lebensversicherungs-Anstalten nicht mehr zulässig seien, weil ja Jeder zurückgewiesen wird, wenn er nicht hinsichtlich seiner Gesundheit den Anforderungen der Bank entspricht. Aber trotzdem, dass 17mal über und nur 8mal unter der wahrscheinlichen Anzahl Sterbefälle beobachtet wurden, müssen die wahrgenommenen Schwankungen verhältnissmässig doch für sehr beträchtlich und so einflussreich betrachtet werden, dass der Zustand der Anstalt empfindlich afficirt werden muss. Dieses gilt namentlich von Banken im ersten Stadium ihrer Existenz und auch von solchen, die nur wenige Versicherte zählen, weil diese Schwankungen und Anomalien nach dem Principe der Wahrscheinlichkeits-Rechnung nur dann zu einem Minimum abgeschwächt werden, wenn die Zahl der Versicherten hinlänglich gross ist. Von diesem Gesichtspuncte aus betrachtet hat die Gothaer Versicherungs-Bank eine Zukunft vor sich, welche ihre gegenwärtigen günstigen Resultate noch weit übertreffen wird.

Wenn z. B. die Stuttgarter Versicherungs-Bank 44 % Dividende ausbezahlt und die Gothaer etwa nur 30 %, so ist hier die Höhe der Dividende für sich allein durchaus nicht entscheidend. Denn es springt in die Augen, dass eine kaum 8 Jahre zählende Versicherungs-Bank mit nur etlichen Tausenden von Versicherten immer noch eine Krisis zu erwarten hat, welche die Bank sogar in ihrer Existenz bedrohen kann. Wir glauben und wünschen dies Letztere durchaus nicht, sondern erwarten im Gegentheil, dass sie bei ihrer sonstigen musterhaften Organisation einer sehr gedeihlichen Zukunft entgegen gehen wird. Allein die Erfahrung der Gothaer Bank hat sie noch nicht.

Digitized by Google

Am meisten ist durch diese Schwankungen in der Sterblichkeit der Reserve-Fond bedroht. Die Tabelle belehrt uns, dass in einem Zeitraum von 25 Jahren niemals 5 mal hintereinander Verlust eingetreten ist. Ein 5jähriges Zurückhalten der abgeschlossenen Dividende ist daher eine sehr weise Einrichtung und ein wirksames Präservativ-Mittel, dem unerwarteten Sinken unter den berechneten Reserve-Fond rechtzeitig zu begegnen und diesen Ausfall zu decken.

III. Abschnitt.

Die Renten-Anstalten.

§. 93.

Einleitung.

Unter Renten-Anstalten versteht man heut zu Tage eine solche Anstalt, welche Capitalien in Empfang nimmt und dieselben nach gewissen Statuten im Interesse und als Eigenthum der Einleger in der Weise verwaltet, dass dieselben, so lange sie leben, Jahresrenten erhalten und mit dem Tode geringe Ansprüche auf die Erben des Gestorbenen übergehen.

Diese Jahresrenten, welche die Einleger anfänglich beziehen, sind dem verschiedenen Alter entsprechend normal festgesetzt und in der Weise niedrig, dass sie allmälig gesteigert werden können. Die Steigerung der Jahresrente wird theils durch den zum Gesammt-Capital geschlagenen Zinsenüberschuss, theils durch Beerbung der durch Tod ausgeschiedenen Einleger bewirkt. Die Anstalt nimmt für sich eine gewisse Provision in Anspruch, und stellt sich gegen jede Gefahr sicher; die Verwaltungskosten haben die Einleger zu tragen. Aus den eingelegten Capitalien wird nun zunächst ein Reserve-Fond und ein Renten-Capital gebildet, sonst vollkommen frei von der Anstalt verwaltet und alljährlich Rechenschaftsbericht von ihr abgelegt. Das Renten-Capital wird nur so hoch genommen,

Digitized by Google

dass die Zinsen desselben alle Jahresausgaben sammt den Jahresrenten decken.

Um den von der Anstalt in Aussicht gestellten Zweck zu erreichen, ist statutenmässig festgesetzt, dass die aus den Einlegern bestehende Renten-Gesellschaft nur dann constituirt werden könne, wenn sich innerhalb Jahresfrist oder auch darüber zum Mindesten eine gewisse Anzahl von Theilnehmern gemeldet hat. Auf das Detail dieser und anderer wesentlicher Puncte werden wir in der Folge kommen.

Was die historische Seite solcher Renten-Gesellschaften betrifft, so nahmen sie in Frankreich unter dem Namen „Tontinen“ ihren Ursprung. Ein gewisser Neapolitaner Lorenz Tonti ersann im Jahre 1653 unter der Aegide des Cardinal Mazarin einen Plan, den zerrütteten Finanzen mittelst der Tontinen aufzuhelfen. Dieser vom Hofe gutgeheissene Plan scheiterte jedoch durch die Hartnäckigkeit des Parlaments. Erst Ludwig XIV. erliess 1689 ein Edict, welches den von Tonti ausgearbeiteten Plan in Wirksamkeit setzte. Seitdem haben sie sich, wenn auch modificirt, fast über ganz Europa verbreitet.

Derjenige, von dem das Unternehmen ausging, hiess Entrepreneur, diejenigen, welche Capitalien hergaben, hiessen Rentenirer; als Erbe der Gesellschaft, falls nach dem Aussterben aller Rentenirer etwas übrig bleiben sollte, war der Garant des Unternehmens eingesetzt. Aber schon im Jahre 1770 wurden die Tontinen für ganz Frankreich durch ein arrêt du conseil aufgehoben und die lebenden Tontinisten mit Leibrenten entschädigt.

Ausser den eigentlichen Tontinen gibt es noch sogenannte Sparkassen-Tontinen, welche ein Gemisch von Sparkasse und Tontine sind und wohl zu den edelsten Instituten zählen. Wir werden die Sparkassen-Tontinen zuerst betrachten, weil sie eine einfachere Behandlung zulassen, als die Renten-Gesellschaften.

Digitized by Google

1. Abtheilung.

Die Sparkassen-Tontinen.

§. 94.

Erklärung des Gegenstandes.

Die Sparkassen-Tontine ist eine Art Renten-Gesellschaft und Sparkasse zugleich; ihr Motiv ist: „Gemeinnützigkeit und Unterstützung des Alters;“ ihre Grundlage: „Gegenseitigkeit.“

Um ein solches Institut in's Leben zu rufen, werden zweckmässige Statuten bekannt gemacht, welche darauf berechnet sind, die Theilnahme zu erleichtern und das Publicum von der Solidität zu überzeugen. Um den Zweck zu erreichen, ist die Theilnahme allgemein gestattet und die Einlage gering.

Zur Constituirung der Gesellschaft ist eine gewisse Anzahl von Mitgliedern erforderlich. Alle jene, welche während Jahresfrist beitreten, bilden eine für sich bestehende Jahresgesellschaft ohne Rücksicht des Alters; ebenso jene, welche im nächsten und in den darauffolgenden Jahren sich zur Theilnahme melden. Weil aber alle diese einzelnen Jahresgesellschaften oder Serien in einem gewissen Verbande unter einander stehen, ist die Zahl der Serien beschränkt, d. h. nach Verfluss einer gewissen Anzahl von Jahren können keine weiteren Serien mehr gebildet werden, wohl aber eine neue Gesellschaft, welche mit der schon bestehenden ausser aller Beziehung steht.

Das Bestehen oder die Dauer der ganzen Gesellschaft ist nach den Statuten festgesetzt, und es kann kein Mitglied vor diesem Zeitpuncte austreten. Stirbt ein Mitglied vor jenem Zeitpuncte, so beerben ihn die Mitglieder der nämlichen Jahresgesellschaft; stirbt eine ganze Jahresgesellschaft aus, so wird ihr Vermögen verhältnissmässig unter alle übrigen Jahresgesellschaften vertheilt. Diejenigen, welche den Zeitpunct der Auflösung erleben, theilen sich in das Vermögen der Gesellschaft; die Anstalt selbst hat keinen weiteren Antheil, als die in den Statuten festgesetzte Provision.

Digitized by Google

Nach diesen Andeutungen haben die Sparkassen-Tontinen das mit der Sparkasse gemein, dass beide die Admassirung kleiner Capitalien bezwecken; unterscheiden sich jedoch davon in folgenden Puncten:

1) ist die Einlage nicht ganz willkührlich;
2) der Austritt oder die Zurücknahme der Einlage vor der Auflösung nicht gestattet;
3) geht die Einlage durch einen zu frühen Tod verloren.

Die Sparkassen-Tontine hat mit der eigentlichen Tontine darin Aehnlichkeit, dass dort wie hier der Genuss der ausgesetzten Summe von dem Leben des Mitgliedes abhängig gemacht ist; unterscheidet sich aber ausser andern Puncten wesentlich darin, dass das Mitglied der Sparkassen-Tontine nur Einmal, und zu einem festgesetzten Zeitpuncte die ihm treffende Summe erhält, während das Mitglied der Tontine jährlich und auf Lebenszeit die ihm in Aussicht gestellte Rente geniesst. Nachdem wir nun zum allgemeinen Verständniss die wesentlichen Puncte besprochen haben, werden wir noch in Besonderen jene Puncte hervorheben, welche vermittelst der Rechnung zu erledigen sind.

§. 95.

Einlage und Vertheilung des Gesellschafts-Capitals.

Hat sich den Statuten entsprechend eine Gesellschaft gebildet, so haben die Mitglieder verschiedenen Alters aus Gründen der verschiedenen Sterblichkeit auch verschiedene Ansprüche. Die Regulirung dieser Ungleichheit kann auf zweierlei Weise geschehen. Entweder machen

1) alle Mitglieder gleiche Einlagen und erhalten bei der Auflösung einen ihrer Sterblichkeit entsprechenden Antheil des gemeinschaftlichen Capitals; oder
2) es macht jedes Mitglied eine seinem Alter entsprechende Einlage und erhält bei der Vertheilung einen Allen gleichen Antheil.

Digitized by Google

Das Eine wie das Andere lässt sich nur vermittelst bewährter Sterblichkeitstafeln zur gegenseitigen Billigkeit ausführen, was wir in den nachfolgenden Paragraphen versuchen wollen.

§. 96.

Bestimmung der Einlage bei gleichmässiger Capitalvertheilung.

Eine $m$jährige Person A und eine $n$jährige B treten einer Sparkassen-Tontinengesellschaft gleichzeitig bei. Welche Einlage k_n hat B zu machen, um dieselben Ansprüche als A zu haben, da Letzterer die Einlage von k_m fl. gemacht hat?

Bezeichnen wir die unbekannte Summe, welche sowohl A als B bei der Vertheilung erhalten wird mit

s, ferner mit

t die Zeit der Vertheilung,

so ist die nach t Jahren zahlbare Summe s gegenwärtig werth

$$s \times \varrho^t ;$$

die Wahrscheinlichkeit, in diesen Besitz zu gelangen, ist mit Beibehaltung unserer früheren Bezeichnung

$$\frac{a_{m+t}}{a_m} ;$$

das Product aus beiden ist der Erwartungswerth des A, welcher seiner Einlage k_m gleichkommen muss [1]).

Es ist daher

$$\textbf{(1)} \qquad k_m = s\,\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m} .$$

Auf dieselbe Weise ist der Erwartungswerth des B durch

$$\textbf{(2)} \qquad k_n = s\,\varrho^t \frac{a_{n+t}}{a_n} .$$

ausgedrückt.

---

[1]) Provision und Verwaltungskosten sind hier ausser Acht gelassen. —

Digitized by Google

Setzen wir den aus Gleichung **(1)** folgenden Werth

$$s = \frac{k_m}{\varrho^t \times \frac{a_{m+t}}{a_m}} = \frac{k_m a_m}{\varrho^t a_{m+t}}$$

in die Gleichung **(2)**, so ist die Einlage des B durch

(3) $$k_n = k_m \frac{a_m a_{n+t}}{a_n a_{m+t}}$$

ausgedrückt.

Bildet man aus Gleichung **(1)** und **(2)** lieber eine Proportion, so wird

(4) $$k_n : k_m = \frac{a_{n+t}}{a_n} : \frac{a_{m+t}}{a_m};$$

d. h. „die Einlagen verhalten sich zu einander, wie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, die Zeit der Vertheilung zu erleben."

Nach diesen Erörterungen ist es ein Leichtes, die Ungleichheit der Einlage den verschiedenen Altern entsprechend zu reguliren, wenn man im Besitze einer bewährten Sterblichkeitstafel ist.

Beispiel. Was hat ein 50jähriger Mann in eine Sparkassen-Tontine einzulegen, um dieselben Ansprüche wie ein 12jähriges Kind zu haben, wenn dasselbe 10 fl. 36 kr. einzuzahlen hat und nach 15 Jahren die Vertheilung stattfindet?

Nach der Sterblichkeitstafel von Deparcieux ist mit Rücksicht auf Gleichung **(3)**

$$a_m = a_{12} = 5897, \quad a_n = a_{50} = 3964;$$
$$a_{m+t} = a_{27} = 5173, \quad a_{n+t} = a_{65} = 2669;$$
$$k_m = 10{,}6;$$

daher

$$k_n = 10{,}6 \frac{5897 \times 2669}{5173 \times 3964} = 8{,}135 \text{ fl.}$$
$$= 8 \text{ fl. } 8 \text{ kr.}$$

Digitized by Google

§. 97.

Berechnung späterer Einlagen.

Jedes Mitglied irgend einer Jahresgesellschaft oder Serie kann sowohl mehrere Einlagen in dieselbe Serie machen, als auch Mitglied aller in der Folge sich bildenden Serien werden. Naturgemäss ändert sich auch die Einlage in jede folgende Serie. Denn wenn schon das Capital jeder einzelnen Serie gesondert verwaltet wird, so stehen doch alle Serien in einem gegenseitigen Erbschaftsverband, und es verlangt die Billigkeit, dass darauf Rücksicht genommen werde.

Nehmen wir an, eine $m$jährige Person A mache bei der Aufnahme die Einlage k_m, so ist die Frage, welche Einlage hat dieselbe Person im nächsten Jahre zu machen, um bei der Capitalvertheilung dieselbe Summe s zu erwarten, als in der ersten Serie?

Nach dem vorigen Paragraphen besteht für die erste Serie die Gleichung

$$\textbf{(1)} \qquad k_m = s\,\varrho^t \frac{a^{m+t}}{a_m};$$

bei der Einlage in die nächste Serie ist A um 1 Jahr älter und als neues Mitglied ohne Rücksicht auf die erste Serie zu behandeln. Hat die Gesellschaft ursprünglich t Jahre zu bestehen, so besteht sie von der nächsten Serie an nur mehr $(t-1)$ Jahre. Wir haben daher, wenn wir die nächste Einlage mit k_{m+1} bezeichnen, die Gleichung

$$\textbf{(2)} \qquad k_{m+1} = s\,\varrho^{t-1} \frac{a_{m+t}}{a_{m+1}}.$$

Durch Division der beiden Gleichungen **(1)** und **(2)** ergibt sich sogleich

$$\textbf{(3)} \qquad k_{m+1} = \frac{k_m\, a_m}{\varrho\, a_{m+1}};$$

Digitized by Google

analog ergibt sich für die folgenden Serien

$$(4)\quad \begin{cases} k_{m+2} = \dfrac{k_{m+1}\, a_{m+1}}{\varrho\, a_{m+2}} = \dfrac{k_m\, a_m}{\varrho^2\, a_{m+2}} \\ k_{m+3} = \dfrac{k_{m+2}\, a_{m+2}}{\varrho\, a_{m+3}} = \dfrac{k_m\, a_m}{\varrho^3\, a_{m+3}} \end{cases}$$

u. s. w.

Beispiel. Ein 9jähriges Kind hat bei der Aufnahme in die erste Serie 10 fl. Einlage zu machen. Welche Einlage hat dasselbe Kind in die zweite und dritte Serie zu machen, wenn die Einlagen in alle Serien nach ein und derselben Normaleinlage berechnet werden?

Nach Deparcieux ist

$$a_m = a_9 = 6073,\ a_{m+1} = a_{10} = 6004,$$
$$a_{m+2} = a_{11} = 5946,$$

und mit Rücksicht auf Gleichung **(3)** und 4% Zinsen

$$k_{m+1} = \frac{10 \times 6073}{\frac{1}{1{,}04} \cdot 6004} = \frac{10 \times 6073 \times 1{,}04}{6004}$$
$$= 10{,}519 \text{ fl.} = 10 \text{ fl. } 31 \text{ kr.};$$

ebenso für die dritte Serie

$$k_{m+2} = \frac{10 \times 6073 \times (1{,}04)^2}{5946} = \frac{65685{,}568}{5946}$$
$$= 11{,}046 \text{ fl.} = 11 \text{ fl. } 2^1/_2 \text{ kr.}$$

Wir haben demnach folgende 3 Einlagen

10 fl. in die erste,
10 fl. 31 kr. in die zweite,
11 fl. $2^1/_2$ kr. in die dritte Serie.

§. 98.

Capitalvertheilung bei gleichmässiger Einlage.

Machen die Mitglieder verschiedenen Alters dieselbe Einlage, so haben die in höherem Alter stehenden Mitglieder bei

Digitized by Google

Vertheilung des Vereins-Capitals einen grösseren Antheil zu beanspruchen, als die jüngeren.

Betrachten wir zwei Personen, eine $m$jährige A und eine $n$jährige B, von denen jede die Einlage

k fl.

macht, und bezeichnen wir ihren rechtmässigen Antheil respective mit

s_m und s_n,

so haben wir nach §. 96 die Gleichungen

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{cases} k = s_m \varrho^t \dfrac{a_{m+t}}{a_m} \\ k = s_n \varrho^t \dfrac{a_{n+t}}{a_n} \end{cases}.$$

Daraus ergibt sich sogleich das Verhältniss ihrer Ansprüche, indem beide Werthe einander gleich sind

$$\textbf{(2)} \qquad s_m : s_n = \frac{a_n}{a_n}^t : \frac{a_{m+t}}{a_m},$$

d. h. „ihre Ansprüche verhalten sich umgekehrt, wie die Wahrscheinlichkeiten, den Zeitpunct der Vertheilung zu erleben."

Beispiel. Ein gegenwärtig 30jähriger und ein 60jähriger Mann traten vor 20 Jahren als Mitglieder einer Sparkassen-Tontine gleichzeitig bei und jeder machte dieselbe Einlage. Bei der nunmehrigen Vertheilung des Gesellschafts-Capitals soll der jüngere von Beiden 200 fl. bekommen. Was wird der ältere erhalten?

Nach Deparcieux ist

$$a_m = a_{10} = 6004, \quad a_n = a_{40} = 4490,$$
$$a_{m+t} = a_{30} = 5005, \quad a_{n+t} = a_{60} = 3191,$$
$$s_m = 200 \text{ fl.};$$

daher nach der in **(2)** aufgestellten Proportion

$$s_n = s_m \frac{a_n\, a_{m+t}}{a_m\, a_{n+t}} = 200\, \frac{4490 \times 5005}{6004 \times 3191}$$
$$= 234{,}59 \text{ fl.} = 234 \text{ fl. } 36 \text{ kr.}$$

Digitized by Google

Kommen mehr als zwei Personen in Betracht, so können entweder je zwei auf die angezeigte Weise, oder auch alle mit einander in Verhältniss gesetzt werden.

Betrachten wir 3 Personen des Alters m, n und q und heissen ihre Ansprüche beziehungsweise

$$s_m, \; s_n, \; s_q,$$

ihre entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$$p_m, \; p_n, \; p_q,$$

so haben wir sogleich nach dem in **(2)** ausgesprochenen Satze

$$\textbf{(3)} \qquad \begin{cases} s_m : s_n = p_n : p_m \\ s_m : s_q = p_q : p_m \\ s_n : s_q = p_q : p_n, \end{cases}$$

welche Proportionen abgekürzt auch auf folgende Art geschrieben werden können

$$\textbf{(4)} \qquad s_m : s_n : s_q = p_q : p_n : p_m,$$

Mit Rücksicht auf **(3)** können wir nun folgende Gleichungen aufstellen

$$s_m = \frac{s_m p_m}{p_m},$$

$$s_n = \frac{s_m p_m}{p_n},$$

$$s_q = \frac{s_m p_m}{p_q},$$

oder auch

$$\textbf{(5)} \qquad s_m + s_n + s_q = s_m p_m \left[\frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_q}\right].$$

Für mehr als 3 Personen bleibt die Betrachtung ganz dieselbe. Bemerken wir noch, dass, wenn alle Mitglieder in Betracht kommen, die linke Seite in **(5)** das zu vertheilende Gesellschafts-Capital ausmacht, welches wir durch

$$K = s_m + s_n + s_q + \ldots.$$

bezeichnen wollen, so können wir ganz allgemein schreiben

$$\textbf{(6)} \qquad K = s_m p_m \left[\frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_q} + \ldots.\right],$$

Digitized by Google

worin die Wahrscheinlichkeiten der übrigen Mitglieder noch zu ergänzen sind.

Bezeichnen wir noch der Kürze halber

$$(7) \qquad S\left[\frac{1}{p_x}\right] = \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_q} + \ldots,$$

so haben wir allgemein die Gleichung

$$(8) \qquad K = s_m p_m \times S\left[\frac{1}{p_x}\right],$$

so dass wir schliesslich den Antheil einer $m$jährigen Person an dem zu vertheilenden Capital K durch

$$(9) \qquad s_m = \frac{K}{p_m S\left[\frac{1}{p_x}\right]}$$

darstellen können, worin wir zur Abkürzung

$$p_m = \frac{a_{m+t}}{a_m} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{p_m} = \frac{a_m}{a_{m+t}}$$

gesetzt haben. Nach der Gleichung (9) lässt sich jedesmal eine richtige Vertheilung des Gesammt-Capitals vornehmen, so verschiedenen Alters die Mitglieder auch sein mögen. Auf diese Gleichung werden wir bei Gelegenheit der Renten-Gesellschaften noch einmal zurückkommen, wesswegen wir hier keine weitere Rücksicht darauf nehmen wollen.

§. 99.

Erwartungswerth einer einfachen Einlage.

Eine $m$jährige Person A leistet bei der Aufnahme in die erste Serie die Einlage k_m; nach t Jahren soll sich die Gesellschaft auflösen. Wie gross wird bei der Capitalvertheilung der Antheil des A sein, wenn die Vertheilung gleichmässig geschieht?

Da hier die Vertheilung gleichmässig geschehen soll, so setzen wir voraus, dass die Ungleichheit in Folge des verschiedenen Alters der einzelnen Mitglieder durch die verschiedenen Einlagen ausgeglichen wurde.

Digitized by Google

Bezeichnen wir mit

s den unbekannten Antheil,

welchen jedes Mitglied für Eine Einlage erhalten wird, so haben wir sogleich die Gleichung

$$k_m = s\,\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m},$$

und umgekehrt

$$(1) \qquad s = \frac{k_m\, a_m}{\varrho^t\, a_{m+t}},$$

als die Grösse der Summe, welche A und jeder Andere erhalten wird, falls er zur Zeit der Vertheilung noch am Leben ist.

Beispiel. Für ein 12jähriges Kind ist in eine Sparkassen-Tontine von 15jähriger Dauer die Einlage von 10 fl. 24 kr. zu machen. Welche Summe hat dasselbe zu gewärtigen, wenn es sein 27tes Lebensjahr erreicht?

Nach Deparcieux und 4% Zinsen ist

$$a_m = a_{12} = 5897, \quad k_m = 10{,}4,$$
$$a_{m+t} = a_{27} = 5173, \quad \frac{1}{\varrho^t} = (1{,}04)^{15},$$

und nach Gleichung (1)

$$s = \frac{10{,}4 \times 5897 \times (1{,}04)^{15}}{5173} = 21{,}351 \text{ fl.}$$
$$= 21 \text{ fl. } 21 \text{ kr.}$$

§. 100.

Fortsetzung.

Obwohl in dem vorigen Paragraphen nur auf Ein Mitglied Rücksicht genommen wurde, so ist der für s aufgestellte Werth

$$s = \frac{k_m\, a_m}{\varrho^t\, a_{m+t}},$$

doch ebenso zuverlässig, als wenn wir das Verzeichniss aller Mitglieder vor uns gehabt und die Rechnung darnach eingerichtet

Digitized by Google

hätten. Dieses beruht in der Ausgleichung der verschiedenen Alter nach dem Principe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das, was jüngere Personen durch eine wahrscheinliche Beerbung vor bejahrteren voraus haben, wird durch eine verhältnissmässig geringere Einzahlung der Letzteren wieder ausgeglichen, durch welche Ausgleichung sozusagen alle Personen auf solche von demselben Alter zurückgeführt werden. Das soeben Gesagte können wir überdiess noch durch folgende Betrachtung bestätigen, indem wir alle Mitglieder in Betracht ziehen.

Nehmen wir nun an, in der Gesellschaft befinden sich

z Mitglieder des Alters m,
z_1 „ „ „ n,
z_2 „ „ „ q

u. s. w., so haben wir für je 1 Person beziehungsweise die Gleichung

$$k_m = s\varrho^t p_m = s\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m},$$

$$k_n = s\varrho^t p_n = s\varrho^t \frac{a_{n+t}}{a_n},$$

$$k_q = s\varrho^t p_q = s\varrho^t \frac{a_{q+t}}{a_q},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

und mit Rücksicht auf z, z_1, z_2 ... Personen

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{cases} z\ k_m = z\ s\varrho^t p_m, \\ z_1\ k_n = z_1 s\varrho^t p_n, \\ z_2\ k_q = z_2 s\varrho^t p_q \end{cases}$$

u. s. w.

Daraus erhalten wir zunächst durch Addition, wenn wir noch die linke Seite als Ausdruck aller Einlagen mit

$$E$$

bezeichnen

$$\textbf{(2)} \qquad E = s\varrho^t [z p_m + z_1 p_n + z_2 p_q + \ldots].$$

Digitized by Google

Eliminiren wir ferner aus allen in (**1**) vorkommenden Gleichungen die Grösse s, so erhalten wir noch

$$z\ k_m = z\ k_m \frac{p_m}{p_m},$$

$$z_1 k_n = z_1 k_m \frac{p_n}{p_m},$$

$$z_2 k_q = z_2 k_m \frac{p_q}{p_m}$$

u. s. w., woraus nunmehr durch Addition folgt

$$(3) \qquad E = \frac{k_m}{p_m}[z\,p_m + z_1 p_n + z_2 p_q + \ldots].$$

Bestimmen wir nun aus den Gleichungen (**2**) und (**3**), welche wir mit Berücksichtigung aller Mitglieder gewonnen haben, den Antheil s, so ist er genau derselbe, wie wir ihn aufgestellt haben, nämlich

$$s = \frac{k_m}{\varrho^t p_m} = \frac{k_m a_m}{\varrho^t a_{m+t}},$$

welcher Werth sich sogleich durch Division der genannten Gleichung ergibt.

Es reicht also bei unserer Voraussetzung, dass die Einlagen nach dem Alter regulirt werden, immer hin, nur Eine Person in der Rechnung zu berücksichtigen, wie wir schon an einem Beispiel gezeigt haben.

§. 101.

Die Sparkassen-Tontine als Ausstattungs- und Versorgungs-Anstalt.

Da die Dauer einer Sparkassen-Tontinen-Gesellschaft gewöhnlich nur 10 bis 20 Jahre umfasst und Personen jedes Alters Mitglieder werden können, so eignet sich die Sparkassen-Tontine ganz besonders für Kinder. Die kleinen Summen, welche deren Eltern während der Kindheit einlegen, können durch wiederholte Einlagen von Seite der Eltern so hoch gesteigert werden, dass daraus den Kindern in den Jahren der Reife ein Capital

Digitized by Google

erwächst, welches ausreicht, den besonderen Bedürfnissen als Aussteuer u. dgl. zu genügen.

Während die Sparkassen-Tontine in Deutschland wenig bekannt zu sein scheint, bestehen sie in Frankreich schon lange, wenn auch unter andern Namen. So z. B. besitzt die *caisse paternelle* in der *association dotale* ein Institut, welches sich nur mit der Aussteuer und Versorgung der Kinder befasst und nach denselben Grundsätzen eingerichtet ist als die Sparkassen-Tontine.

Auch gibt es Lebensversicherungs-Anstalten, welche sich mit Aussteuer und Ausstattung der Kinder befassen, wie z. B. jene in Lübeck und Stuttgart und die Gesellschaft Janus in Hamburg, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Summe, welche das Kind beim Antritt eines festgesetzten Jahres erhalten soll, im Voraus bestimmt ist.

Was die Rechnung in diesem letzteren Falle betrifft, so macht es gar keinen Unterschied, ob die Antrittssumme voraus bestimmt ist oder nicht; denn die früher aufgestellte Gleichung

$$k_m = s\,\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m}$$

zwischen der Einlage k_m und der Summe s, welche das Mitglied nach t Jahren erhalten soll, ist für beide Fälle giltig.

Beispiel. Ein Vater schliesst für sein gegenwärtig 6jähriges Kind mit einer Versorgungs-Anstalt einen Vertrag dahin ab, dass demselben nach zurückgelegtem 26sten Lebensjahre von der Anstalt die Summe von 1500 fl. ausbezahlt werde. Welche Einlage kann die Anstalt billigerweise verlangen?

Nach der vorigen Gleichung haben wir allgemein

$$k_m = s\,\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m},$$

und nach Deparcieux und 4% Zinsen

$$a_m = a_6 = 6345, \quad a_{m+t} = a_{26} = 5231;$$

$$t = 20, \; \varrho = \frac{1}{1{,}04};$$

Digitized by Google

mithin wird

$$k_m = \frac{1500 \times 5231}{(1{,}04)^{20}\, 6345} = 564{,}39 \text{ fl.}$$

Zu dieser Summe ist noch der treffende Theil der Verwaltungskosten zu rechnen.

§. 102.

Jährliche Einzahlungen aus der Grösse der Aussteuer.

Ein Vater will durch einen Vertrag mit einer Versorgungs-Anstalt seinem $m$jährigen Kinde die Aussteuer von s fl. sichern und die Einlage durch jährliche Baarzahlungen innerhalb x Jahren tilgen. Was ist jährlich einzuzahlen, wenn das Kind von heute nach t Jahren die Aussteuer erhält?

Der volle Werth der Einlage ist durch

$$\textbf{(1)} \qquad k_m = s\, \varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m}$$

ausgedrückt, welcher Betrag durch Jahreszahlungen und zwar innerhalb x Jahren einzuzahlen ist. Bezeichnen wir mit

s_m die jährliche Baarzahlung,

und wird die erste sogleich gezahlt, so ist der gegenwärtige Werth aller x Baarzahlungen

$$s_m + s_m \varrho \frac{a_{m+1}}{a_m} + s_m \varrho^2 \frac{a_{m+2}}{a_m} + \ldots + s_m \varrho^{x-1} \frac{a_{m+x-1}}{a_m}$$

$$= s_m + s_m \left[\varrho \frac{a_{m+1}}{a_m} + \varrho^2 \frac{a_{m+2}}{a_m} + \ldots + \varrho^{x-1} \frac{a_{m+x-1}}{a_m} \right];$$

oder unter Berücksichtigung, dass der in Klammer stehende Ausdruck eine temporäre Leibrente auf $(x-1)$ Jahre bedeutet

$$= s_m + s_m \left[r_m - {}_{(x-1)}r_m \right] = s_m \left[1 + r_m - {}_{(x-1)}r_m \right].$$

Dieser Werth lässt sich in Beziehung auf die Sterblichkeitstafel noch schreiben

$$s_m \left[1 + r_m - \varrho^{x-1} \frac{a_{m+x-1}}{a_m} r_{m+x-1} \right];$$

Digitized by Google

und da dieser Werth der Einlage k_m gleich sein muss, so haben wir zur Bestimmung von s_m die Gleichung

$$(2) \quad s_m \left[1 + r_m - \varrho^{x-1} \frac{a_{m+x-1}}{a_m} r_{m+x-1}\right] = s\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m}.$$

Beispiel. Ein Vater sucht seinem 6jährigen Kinde eine Summe von 1500 fl., zahlbar nach dem zurückgelegten 26sten Lebensjahre, zu sichern, und verpflichtet sich desshalb, die entsprechende Einlage in 10 gleichen Jahresraten zu tilgen und die erste sofort zu erlegen. Wie hoch wird sich die jährliche Einzahlung belaufen bei 4 % Zinsen?

Aus der vorigen Gleichung haben wir allgemein

$$s_m = \frac{s\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m}}{1 + r_m - \varrho^{x-1} \frac{a_{m+x-1}}{a_m} \cdot r_{m+x-1}}.$$

Mit Benützung des vorigen Beispiels ist

$$s\varrho^t \frac{a_{m+t}}{a_m} = \frac{1500 \times 5231}{(1{,}04)^{20}\, 6345} = 564{,}39 \text{ fl.},$$

nach den Tabellen von Deparcieux ist ferner

$$r_m = r_6 = 18{,}8858, \quad a_{m+x-1} = a_{15} = 5778,$$
$$r_{m+x-1} = r_{15} = 18{,}5493, \qquad x = 10,$$

daher

$$\varrho^{x-1} \frac{a_{m+x-1}}{a_m} r_{m+x-1} = \frac{5778 \times 18{,}5493}{(1{,}04)^9\, 6345} = 11{,}8679 \text{ fl.}$$

Mit diesen Werthen wird nun die Jahreszahlung nach obiger Gleichung

$$s_m = \frac{564{,}39}{19{,}8858 - 11{,}8679} = \frac{564{,}39}{8{,}0179} = 70{,}392 \text{ fl.}$$
$$= 70 \text{ fl. } 24 \text{ kr.},$$

wobei jedoch die Verwaltungskosten der Anstalt nicht berücksichtigt sind.

Digitized by Google

Zur Vergleichung theilen wir einen Tarif der Stuttgarter Lebensversicherungs- und Ersparniss-Bank mit und bemerken, dass die Prämien bis zum Zahltermine der vorgesetzten Summe geleistet werden müssen.

Jahres-Prämien ohne Rückvergütung.

Alter des Beitritts	Alter, wann das Capital 100 fl. bezahlt werden soll.													
	18 Jahre		20 Jahre		25 Jahre		30 Jahre		35 Jahre		40 Jahre		45 Jahre	
Jahre	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.
½	3	54,6	3	19,1	2	21,1	1	43,0	—	16,7	—	57,6	—	43,7
1	3	59,9	3	25,7	2	25,2	1	45,8	1	18,5	—	59,0	—	44,7
2	4	25,0	3	45,6	2	37,2	1	53,6	1	23,9	1	2,8	—	47,4
3	4	52,2	4	6,8	2	49,7	2	1,6	1	29,3	1	6,6	—	50,3
4	5	22,0	4	29,5	3	2,8	2	9,8	1	34,8	1	10,4	—	53,0
5	5	55,8	4	35,0	3	16,9	2	18,6	1	40,6	1	14,4	—	55,8
6	6	34,6	5	23,6	3	32,3	2	27,9	1	46,8	1	18,6	—	58,6
7	7	20,1	5	56,4	3	49,3	2	38,0	1	53,3	1	23	1	1,9
8	8	14,6	6	34,6	4	8,2	2	49,1	2	0,3	1	27,8	1	5,2
9	9	21,2	7	19,6	4	29,5	3	1,2	2	7,9	1	32,7	1	8,7
10	10	44,5	8	13,8	4	53,8	3	14,5	2	16,2	1	38,3	1	12,4
11	12	31,6	9	20,1	5	21,6	3	29,4	2	25,2	1	44,1	1	16,5
12	14	54,9	10	43,2	5	53,8	3	46,0	2	35,0	1	50,5	1	20,8
13	18	15,8	12	30,4	6	21,6	4	4,7	2	45,9	1	57,3	1	25,4
14			14	53,6	7	16,5	4	25,8	2	57,8	2	4,8	1	30,4
15			18	14,6	8	10,4	4	49,9	3	11,1	2	13,0	1	35,8
16					9	16,6	5	17,6	3	25,8	2	21,9	1	41,6
17					10	39,6	5	49,7	3	42,4	2	31,7	1	47,6
18					12	26,6	6	27,3	4	0,9	2	42,4	1	54,7
19					14	49,6	7	11,9	4	21,9	2	54,3	2	2,1
20					18	10,2	8	5,7	4	45,9	3	7,5	2	10,2
21							9	11,6	5	13,5	3	22,1	2	19,1
22							10	34,4	5	45,4	3	38,5	2	28,8
23							12	21,1	6	22,9	3	57	2	39,5
24							14	43,8	7	7,4	4	18	2	51,3
25							18	4,1	8	1,1	4	41,8	3	4,5
26									9	7	5	9,3	3	19,1
27									10	29,7	5	41,2	3	35,5
28									12	16,3	6	18,6	3	54,0
29									14	38,9	7	3,0	4	14,9

Digitized by Google

Alter des Beitritts	Alter, wann das Capital 100 fl. bezahlt werden soll.													
	18 Jahre		20 Jahre		25 Jahre		30 Jahre		35 Jahre		40 Jahre		45 Jahre	
Jahre	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.
30									17	59,0	7	56,6	4	38,8
31											9	2,4	5	6,2
32											10	24,9	5	38,1
33											12	11,2	6	15,5
34											14	38,9	7	0
35											17	53,7	7	53,6

	45 Jahre		50 Jahre		55 Jahre		60 Jahre	
	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.
36	8	59,4	5	1,4	3	8,2	2	2,6
37	10	22,0	5	33,0	3	24,1	2	11,6
38	12	8,5	6	10,2	3	42,0	2	21,6
39	14	31,0	6	54,3	4	2,3	2	32,6
40	17	50,9	7	47,5	4	25,5	2	44,9
41			8	52,7	4	52,2	2	58,6
42			10	14,7	5	23,3	3	14,0
43			12	0,4	5	59,7	3	31,4
44			14	21,9	6	43,1	3	51,1
45			17	40,7	7	35,5	4	13,7
46					8	40,0	4	39,8
47					10	1,2	5	10,3
48					11	46,1	5	46,2
49					14	6,7	6	29,0
50					17	24,5	7	20,8

§. 103.

Die Ersparniss-Bank in Stuttgart.

Wie schon erwähnt, besteht bei der Lebensversicherungs-Bank in Stuttgart ein Geschäftszweig darin, dass sie gegen tarifmässige Einlage oder Jahres-Prämien zum Zwecke der Aussteuer und Altersversorgung im Voraus bestimmte Summen gewährt und dann ausbezahlt, wenn die in der Police bezeichnete Person das festgesetzte Alter erreicht. Nach der im

Digitized by Google

Jahre 1855 veröffentlichten Tariftabelle würde eine 15jährige Person 44 fl. 25,2 kr. baar einzuzahlen haben, um nach zurückgelegtem 35sten Lebensjahre ein Capital von 100 fl. zu erhalten.

Machen wir von unserer Formel

$$k_m = s\,\varrho^t\,\frac{a_{m+t}}{a_m},$$

und von der Sterblichkeitstafel der Bank, welche sie in anerkennenswerther Weise öffentlich zur Kenntniss bringt, Gebrauch, so ergibt sich bei 4% Zinsen

$$k_m = \frac{100 \times 3761}{(1{,}04)^{20}\,4810} = 35{,}686 \text{ fl.} = 35 \text{ fl. } 41{,}1 \text{ kr.}$$

was eine Differenz von 8 fl. 44 kr. ausmacht.

In gleicher Weise macht eine 20 und 25jährige Person nach dem Tarife beziehungsweise die Einlage von

43 fl. 4,2 kr. und 41 fl. 49,1 kr.,

um nach Verfluss von 20 Jahren die Summe von 100 fl. zu erhalten, während die Rechnung beziehungsweise nur

34 fl. 39,3 kr. und 34 fl. 6,2 kr.,

und somit eine Differenz von

8 fl. 24,9 kr. und 7 fl. 42,9 kr.

ausweist. Diese Mehreinlage wird theilweise zu den Verwaltungskosten gerechnet und theilweise wieder dadurch vergütet, dass der Police-Inhaber zugleich Actionär ist und eine verhältnissmässige Dividende erhält.

2. Abtheilung.

Die Renten-Gesellschaften.[1])

§. 104.

Einleitung.

Die Renten-Anstalten haben sich keiner grossen Theilnahme zu erfreuen. Seit ihrem noch nicht 40jährigen Bestehen

[1]) Das, was wir über Renten-Gesellschaften mittheilen, ist vorläufig nur als ein Versuch zu betrachten. In allen einschlägigen Werken,

Digitized by Google

ist die Theilnahme schon im Abnehmen, während jene der Lebensversicherungen im steten Wachsen begriffen ist. Diese Abnahme darf aber nicht in der Gleichgiltigkeit des Publicums, sondern vielmehr in der mangelhaften Einrichtung dieser Anstalten selbst gesucht werden. Die Rechtfertigung davon wird sich leicht aus dem Folgenden ergeben, wenn wir die wichtigsten Puncte erörtert haben werden. Zuerst wollen wir die zur Zeit in Deutschland bestehenden Anstalten nach ihrer chronologischen Ordnung aufzählen:

1) Die Renten-Anstalt in Wien (1823).
2) Die Renten-Anstalt in Stuttgart (1833).
3) Die Badische allgemeine Versorgungs-Anstalt (1835).
4) Die Preussische Rentenversicherungs-Anstalt (1838).
5) Die Renten-Anstalt in München (1839).
6) Die Rentenversicherungs-Anstalt in Sachsen (1841).
7) Die Renten-Anstalt in Hannover (1843).
8) Die Renten-Anstalt in Darmstadt (1844).
9) Die allgem. Altersversorgungs-Anstalt in Breslau (1844).

Seit 16 Jahren wurde keine derartige Anstalt mehr gegründet, während in den letzten 10 Jahren 15 neue Lebensversicherungs-Anstalten in Deutschland entstanden sind. Mehrere dieser Anstalten haben zwar, durch Erfahrung belehrt, wesentliche Modificationen in ihren Einrichtungen angebracht, werden aber gleichwohl keine grosse Zukunft haben, wenn sie nicht noch weiter gehen und eine radicale Umänderung ihrer Institutionen

---

welche uns zu Gebote standen, fanden wir fast gar Nichts über diesen Gegenstand, mit Ausnahme der politischen Arithmetik von **Bleibtreu**. Was hier über Renten-Gesellschaften mitgetheilt wird, ist zwar sehr umfangreich, für unsere Auffassung jedoch gänzlich unbrauchbar; denn wir halten es für eine nicht lohnende Arbeit, bloss die Statuten und Einrichtungen der Renten-Anstalt zu reproduciren, dieselben zu erklären und eine allenfallsige Buchführung der Verwaltung zu geben. Dagegen erscheint es uns vor Allem geboten, den Kern der Sache zu untersuchen und theoretisch begründete Sätze aufzustellen, welche vielleicht eine hinreichende Theorie ermöglichen. Zugleich scheint es uns Pflicht, nicht bloss zu rechnen, sondern auch Zweck und Bedeutung dieses Instituts in's Auge zu fassen.

Digitized by Google

vornehmen, wie z. B. die Anstalt in Stuttgart, welche sich seit 5 Jahren vollkommen neu organisirt hat und von allen übrigen Anstalten die vollkommenste Einrichtung besitzt.

Obwohl jede dieser Anstalten ihre besonderen Statuten hat, so sind sie doch der Hauptsache nach einander gleich. In den nachfolgenden Rechnungen, welche strenge genommen den Statuten angepasst sein müssten, werden wir von speciellen Statuten Umgang nehmen, und dieselben so einrichten, dass vermöge derselben die Gebrechen der Anstalt erkannt und die Anforderungen einer besseren ermittelt werden können, ferner sollen darin beide Theile, Unternehmer und Theilnehmer, berücksichtigt werden. Zunächst werden wir nun die Puncte einzeln hervorheben, welche als Hauptgebrechen bezeichnet werden müssen.

§. 105.

Die Classen-Eintheilung.

Wie schon früher bemerkt, bilden alle jene Theilnehmer (Einleger), welche innerhalb Jahresfrist beitreten, eine besondere Jahresgesellschaft oder Serie. Solche Jahresgesellschaften können sich jährlich nachbilden, die sämmtlich in einem gegenseitigen Verband stehen und die Renten-Gesellschaft ausmachen. Da nun jede Jahresgesellschaft ihr Renten-Capital von dem der übrigen gesondert hat, und es ungerecht sein würde, wenn wegen der ungleichen Sterblichkeit jüngere Mitglieder den älteren gleiche Renten bezögen, so pflegt man die Mitglieder nach ihrem Alter in Classen einzutheilen und ebensoviele Abstufungen in den Jahresrenten einzuführen. Gesetzt auch, diese Abstufungen seien nach richtigen Grundsätzen bestimmt, von Jahr zu Jahr werde mit dem Steigen der Rente eingehalten und die Erbantheile jeder Classe werden mit gleicher gegenseitiger Billigkeit festgesetzt, so ist die Ungleichheit in den Jahresrenten doch nicht aufgehoben, sondern nur gemildert. Wenn z. B. — unter übrigens gleichen Umständen — ein 20jähriges Mitglied die nämliche Rente bezieht als ein 30jähriges,

Digitized by Google

so ist der erstere zu sehr im Vortheil, als dass von einer gegenseitigen Billigkeit die Rede sein könnte. Es scheint, dass dabei, Einfachheit in die Verwaltung zu bringen, der leitende Gedanke gewesen sei, was aber bei genauer Prüfung nur Täuschung sein dürfte. Da nun diese übliche Rentenabstufung stets mit Unbilligkeit verbunden ist, so halten wir nicht für nöthig, näher darauf einzugehen, und verweisen auf den Paragraph, welcher von der „Rentenvertheilung" handelt.

§. 106.

Der Reserve-Fond und das Renten-Capital.

Aus den Einlagen der Mitglieder werden zunächst zwei Theile gemacht. Der eine bildet das Renten-Capital, welches schätzungsweise so gross genommen wird, dass die Jahreszinsen desselben die fälligen und bis zu einer gewissen Höhe garantirten Jahresrenten an die Mitglieder decken; die andere bildet den sogenannten Reserve-Fond. Aus dem Letzteren werden allenfallsige momentane Zuschüsse zum Renten-Capital, die Provisions-Beträge der Agenten, die laufenden Kosten für Verwaltung der Anstalt und endlich noch eine gewisse Provision bestritten, welche die Anstalt für die Oberleitung und übernommene Garantie fordert, falls dieselbe keine auf Gegenseitigkeit gegründete Anstalt ist. Wie man sieht, wird der Reserve-Fond sehr in Anspruch genommen, und ist auch für die Mitglieder unter einander von der grössten Wichtigkeit. Dazu steuert jede Jahresgesellschaft und jede Classe derselben bei, und es frägt sich jetzt, wie viel hat jede in die Casse dieses Fonds zu legen? Bei ungenauen Rechnungen und bei oberflächlicher Annahme der Grösse dieses Fonds wird sich gar häufig ereignen, dass er entweder zu reich oder zu dürftig dotirt worden ist. Beides ist vom Uebel. Ist er zu reich, so werden die Jahresrenten zu klein und es wird manchen Classen unvermeidlich doppeltes Unrecht angethan. Die höheren Classen müssen vor allen bedacht werden, weil sie früher aussterben, und eine kürzere Frist zur möglichen Ausgleichung vor sich

Digitized by Google

haben. Ist einmal ein solches Uebel eingetreten, so lässt sich durch das Experiment des Hinwegnehmens und Hinzufügens der einmal erlittene Nachtheil nur schwer mehr gut machen, und man läuft sogar Gefahr, in noch grössere Collision zu gerathen. Ist er aber zu dürftig dotirt, so ist das Uebel noch grösser; zur Abhilfe muss das Renten-Capital und also die Rente selbst geschmälert werden. Eine jede solche Ausgleichung führt eine neue Ungerechtigkeit mit sich, weil dabei, wie schon vom Anfang her, nicht nach den Principien einer gründlichen Rechnung, sondern nach willkührlich angenommenen Verhältnisszahlen verfahren wird. Die materiell nachtheiligen Folgen einer solchen Zersplitterung wollen wir gar nicht weiter verfolgen, sondern nur bemerken, dass die Rechenschafts-Berichte dieser Anstalten selbst auffallende Ungeräumtheiten aufweisen. Der Inhalt der Statuten ist auch der Art, dass eine gründliche Rechnung keine geringe Arbeit wäre, so wie auch die Verwaltung und Buchführung an Complicirtheit seines Gleichen suchen mag.

Wegen der eigenthümlichen Beerbung von Classen zu Classen und Serien zu Serien muss bei Dotirung des Reserve-Fonds auch dieses gegenseitige Verhältniss berücksichtigt werden; wie dieses geschieht, ist uns unbekannt; aber so viel scheint aus Allem mit Gewissheit hervorzugehen, dass eine gegenseitige Billigkeit nicht wohl erreicht wird.

§. 107.

Die Capital-Auflösung.

Die Jahresrenten werden, wie schon bemerkt, aus den Zinsen des Renten-Capitals genommen und allenfallsige Zuschüsse aus dem Reserve-Fonde. Da nun jede Classe ihr eigenes Renten-Capital hat, und fortan unversehrt erhält, so würde nach dem Aussterben einer Classe ihr ganzes Capital an die noch übrigen Classen derselben Serie vertheilt werden. Abgesehen von der rechtmässigen Vertheilung wäre es doch offenbar zu hart, wenn eine ganze Classe Nichts als die Zinsen

Digitized by Google

ihres Capitals geniessen könnte, und müsste zuletzt auf einen Zustand führen, welcher mit den Begriffen von Recht und Billigkeit schlechterdings unvereinbar ist. Denn nach demselben Principe müsste ja jede Classe ihr Grund- und Erb-Capital zurücklassen, und es würde zuletzt das Vermögen einer ganzen Jahresgesellschaft Eigenthum der überlebenden Serien und beim Aussterben aller Serien Eigenthum des letzten Mitglieds werden. Ein solches Ende widerstrebt aller gesunden Vernunft.

Um diesem Uebel abzuhelfen und die Mitglieder in einen theilweisen Genuss ihres Capitals zu setzen, wurden in die Statuten Bestimmungen aufgenommen, gemäss welcher von dem Zeitpunct an, als nur mehr eine gewisse Anzahl Classen-Mitglieder am Leben ist, ein festgesetzter Theil des vorhandenen Renten-Capitals in eine Zeitrente aufgelöst wird. Diese Zeitrente wird auf so viele Jahre berechnet, dass voraussichtlich kein Mitglied dieser Classe darüber hinaus leben wird. Dieses Auskunftsmittel, die Capital-Auflösung[1]) genannt, wird aber nicht nach strengen Regeln, sondern sowohl in Ansehung der Zeit als auch des Antheils nach völlig willkührlichen Zahlen geübt, so dass von einer gegenseitigen Billigkeit gar keine Rede sein kann.

Solche und ähnliche Acte zur Ausgleichung eingeschlichener Uebelstände werden in der Regel ohne alle Rücksicht auf andere Dinge jeder für sich vollzogen, obgleich sie sich gegenseitig auf's engste bedingen und von einander abhängen. Es wird nicht befremden, dass z. B. auch die gewissenhafteste Capital-Auflösung, an sich betrachtet, einen ungerechten Nachtheil für die berechtigten Erbansprüche anderer Classen zur Folge haben wird, wenn nicht bei der Auflösung selbst darauf Rücksicht genommen wird. Ebenso ungerecht und unbillig ist es, wenn die Mitglieder ein und derselben Classe durch eine plötzliche Capital-Auflösung in den Genuss auffallend höherer

[1]) Die Capital-Auflösung wurde von allen Anstalten erst später eingeführt mit Ausnahme jener in Wien und Berlin.

Digitized by Google

Renten gelangen, als die schon Gestorbenen zu ihren Lebzeiten bezogen. Ein solches Reglement kann in keiner Weise gut geheissen werden.

§. 108.

Die gegenseitige Beerbung.

Bei dem Todesfalle eines Mitgliedes wird mehr oder weniger Renten-Capital zurückgelassen werden. In diesen Rücklass theilen sich die Mitglieder derjenigen Classe, welcher der durch Tod Ausgeschiedene angehörte, als Erben gleichheitlich. Stirbt aber eine ganze Classe aus, so erben ihren Rücklass alle Classen der nämlichen Serie oder Jahresgesellschaft.

Die Vertheilung unter die einzelnen Classen geschieht auch hier ganz willkührlich ohne jeden geregelten Massstab. Doch ist der Einfluss hier nicht so bedeutend als bei der Capital-Auflösung, da, nach dem zu urtheilen, was wir bis jetzt mitgetheilt haben, die Erbschaft im Allgemeinen nicht gar gross ausfallen wird.

Ebenso willkührlich theilen sich die überlebenden Serien in den Rücklass einer ausgestorbenen Serie. Sollten alle Jahresgesellschaften aussterben, ohne ihr Renten-Capital aufgezehrt zu haben, so sind besondere Bestimmungen getroffen, was mit dem Rücklass geschehen soll. Das Unbillige bei diesen Erbvertheilungen lässt sich der Grösse nach nur im Zusammenhang mit dem ganzen Repartitions-System beurtheilen, worauf es aber hier schon von vorne herein nicht abgesehen war.

§. 109.

Die Anfangs- und Maximal-Rente.

Der hauptsächlichste Zweck der Renten-Anstalten ist, den Mitgliedern der Gesellschaft allmählig steigende Renten zu verschaffen, ohne die ursprüngliche Einlage zu erhöhen. Aus diesem Grunde sind die Anfangs-Renten ziemlich niedrig, und für die jüngeren Classen sogar niederer, als die Zinsen der

Digitized by Google

Einlage betragen. Diese Anfangs-Rente wird verhältnissmässig von Classe zu Classe erhöht; so z. B. beträgt sie bei der Renten-Anstalt der bayerischen Hypotheken- und Wechsel-Bank in München für eine Einlage von 100 fl.:

Für die	1.	Classe	3	fl. 12	kr.
„ „	2.	„	3	„ 24	„
„ „	3.	„	3	„ 36	„
„ „	4.	„	3	„ 48	„
„ „	5.	„	4	„ 12	„
„ „	6.	„	4	„ 36	„
„ „	7.	„	5	„ 12	„

Die allmählige Erhöhung der Anfangs-Renten hängt natürlich von der Vergrösserung des Renten-Capitals durch Erbantheile ab. Da die Classen höheren Alters höhere Renten geniessen, als die niederen Alters, so müssen sie nothwendig ein höheres Renten-Capital besitzen und dürfen daher verhältnissmässig weniger zum Reserve-Fond beitragen, als die jüngeren. Soweit ist dieses ganz in der Ordnung. Weil aber vor allen die Renten der höheren Classen gesteigert werden müssen, dieses aber gar häufig auf Unkosten des Reserve-Fond geschieht, so wird schliesslich eine neue Regulirung desselben nothwendig, welche gewöhnlich unbilligerweise zum Nachtheil anderer Classen bewerkstelliget wird. Sind schon die Anfangs-Renten fast durchgehends nach Gutdünken festgesetzt, so lässt sich kaum erwarten, dass die Steigerung derselben nach einem andern Mass-Stabe vorgenommen wird. Das Steigen der Rente hat aber selbst wieder eine bestimmte Grenze; hat sie einmal dieses Maximum erreicht, so geniesst sie das betreffende Mitglied bis zu seinem Tode ungeändert fort. Eine andere Frage ist es aber, ob dieses Maximum, welches bei manchen Anstalten für eine Einlage von 100 fl. jährlich 150—200 fl. beträgt, jemals erreichbar ist. Sowohl aus den bisherigen Erfahrungen als aus theoretischen Gründen bezweifeln wir es sehr und halten es für einen Köder leichtgläubiger Menschen.

Bedenken wir noch einmal die ansehnliche Dotation des Reserve-Fonds zur Deckung der Verwaltungskosten und der

Digitized by Google

verschiedenen Provisionen, so scheint mehr als ein gewöhnliches Genie erforderlich, um diese in Aussicht gestellte ansehnliche Rente zu realisiren. Die bisherigen, wenn auch nicht hinreichend langen Erfahrungen erlauben wenigstens ein annäherungsweises Urtheil. Nachstehend theilen wir das Geschäfts-Ergebniss der königl. preussischen Renten-Anstalt in Berlin mit und bemerken, dass die Berichte der übrigen Anstalten, welche solche veröffentlicht haben, nicht günstiger lauten.

Die vom 2. Januar ab zahlbaren Renten der Einlage von 100 Thlr. bei der preuss. Renten-Anstalt in Berlin.

Jahres-Gesellschaft.	In der Classe:											
	I.		II.		III.		IV.		V.		VI.	
	Thlr.	Sgr.	Thlr.	Sgr.	Thlr.	Sgr.	Thlr.	Sgr.	Thlr.	Sgr.	Thlr.	Sgr.
1839	4	—	4	19	5	8	5	29,5	8	14	17	1
1840	3	26,5	4	15	5	—	5	18,5	7	9	12	8,5
1841	3	26,5	4	14	4	27	5	11	6	12,5	12	11,5
1842	3	25,5	4	14	4	29	5	17,5	7	14	12	17,5
1843	3	29,5	4	12,5	4	29	5	20,5	7	3,5	12	23
1844	4	3,5	4	19	4	29,5	5	18	10	29,5		
1845	3	23,0	4	—	5	5,5	5	9,5	6	11,6		
1846	3	19,5	4	1	4	16,5	4	25,5	6	14		
1847	3	21	4	2	4	12,5	5	5	5	1		
1848	3	22,5	3	29,5	4	16,5	5	17	7	18,5		
1849	3	21,5	4	5,0	4	22,5	5	1	5	5		
1850	3	20,0	4	—	4	15,5	4	22	5	13		
1851	3	20,5	4	3,5	4	6	4	17	5	9		
1852	3	21,5	4	2	4	8	4	17	5	21		
1853	3	22,6	4	—	4	16,5	4	23	5	14		
1854	3	20,6	4	2,5	4	11	4	17	5	6		
1855	3	22,0	4	26,5	4	9	4	18	6	4,5		
1856	3	17,0	3	10	4	8,5	4	17	4	28,5		
1857	3	—	3	20	4	6,5	4	—	4	10		

Nach Ausweis dieser Tabelle ist die Anfangs-Rente der I. Classe der ältesten Jahresgesellschaft von 1839 also innerhalb 20 Jahren nicht höher gestiegen, als von 3 auf 4 Thlr; in

Digitized by Google

der II. auf 4 Thlr. 19 Sgr.; in der III. auf 5 Thlr. 8 Sgr. u. s. w. Die höchste Rente beträgt in der VI. Classe der ältesten Serie 17 Thlr. 1 Sgr., obgleich die Mitglieder derselben durchschnittlich ein Alter von 75 — 80 Jahren haben werden; und es sieht fast wie unmöglich aus, dass sie jemals eine Rente von 150 Thlr. geniessen werden.

Gesetzt auch, es würden einige Mitglieder zu einer solchen wunderbaren Rente gelangen, so wäre sie für ihre eigene Person von keinem grossen Werthe. Ein Greis von 90 Jahren ist wohl selten mehr in einem solchen körperlichen Zustand, dass er sich damit gütlich zu thun vermöchte. Die sanguinische Hoffnung auf die Maximal-Rente dürfte wohl nur eitler Trug sein.

§. 110.

Allgemeine Bemerkungen über Zweckmässigkeit der Renten-Gesellschaften.

Neben diesen bis jetzt erwähnten äusseren Uebelständen, welche hauptsächlich in den Einrichtungen der Anstalten begründet sind, gibt es auch noch innere, welche direct mit der Idee der Renten-Gesellschaften zusammenhängen, und ihre Zweckmässigkeit betreffen. Hier ziehen wir die Mitglieder allein in Betracht, und unterscheiden wohlhabende und wenig bemittelte.

Wollte nun eine wohlhabende Person Mitglied werden, so müsste dem Eintritte der Fall vorangehen, dass sie selbst allein stehe, und keine Angehörigen habe, auf welche Rücksicht zu nehmen wäre, weil der Genuss nur persönlich ist und mit dem Tode Capital und Rente verloren geht. Nehmen wir diesen Fall an, so wird sich trotzdem jeder Kluge wohl bedenken, in eine Gesellschaft zu treten, die ihm gerade in den Jahren der grössten Bedürfnisse und Verbrauchs-Fähigkeit Nichts oder nur wenig mehr als die Zinsen seines Capitals gewährt, dagegen für die Periode der körperlichen Gebrechlichkeit, wo die Sinne und Organe des Menschen allmählig absterben und für alles Irdische theilnahmslos werden, ein

Digitized by Google

goldenes Kalb in Aussicht stellt; für ihn ist es unbedingt zweckmässiger, eine seinen Kräften und Bedürfnissen entsprechende Leibrente zu kaufen.

Nicht viel besser eignet sich das Institut der Renten-Gesellschaften für weniger Bemittelte. Kann ein solcher nur einige Einlagen machen, so hat er davon einen so geringen jährlichen Genuss, dass dadurch seine Subsistenz-Mittel nicht wesentlich vermehrt werden; dagegen kann er für seine späteren Jahre durch eine aufgeschobene Leibrente weit besser sorgen, als es ihm durch den Beitritt in eine Renten-Gesellschaft möglich ist.

Aus diesen Gründen glauben wir nicht, dass das Institut der Renten-Gesellschaften eine grosse Zukunft haben wird.

Ziemlich viele Mitglieder zählt die Renten-Anstalt in Stuttgart, obgleich sie seit ihrer Reorganisation die jüngste ist. Laut Rechenschafts-Bericht für das Jahr 1859 befinden sich unter 25000 Versicherungen keine 7000 Mitglieder, welche Renten-Gesellschaften angehören; davon sind circa 2200 auf steigende Renten versichert und aus jedem Verbande der Gesellschaft, so dass nur etwas mehr als 4500 Gesellschafts-Mitglieder älterer Form darunter sich befinden. Aehnliches gilt von den übrigen Anstalten.

Wir wollen nun, nachdem wir die hauptsächlichsten Gebrechen besprochen haben, auch zeigen, auf welche Weise dieses theoretisch und practisch complicirte System durch ein natürlicheres und einfacheres ersetzt werden kann.

§. 111.

Massstab der Renten-Vertheilung unter die Mitglieder einer und derselben Serie bei gleicher Einlage.

1) Für zwei Personen.

Zur Begründung unseres Satzes, welcher die Basis aller in der Folge zu erörternder Sätze bilden soll, halten wir noch die Trennung der einzelnen Serien oder Jahresgesellschaften aufrecht und erklären nur die Classen-Eintheilung für überflüssig.

Digitized by Google

Nehmen wir ferner an, die Serie bestehe aus n Mitgliedern verschiedenen Alters, und es komme die Summe K zur Vertheilung, so ist zu untersuchen, welchen Antheil jedes Mitglied erhalten wird.

Zu dem Ende lassen wir die Serie vorläufig nur aus zwei Personen A und B bestehen und heissen

λ den Antheil des A,

μ „ „ „ B, so dass

$$\lambda + \mu = 1$$

sein muss; ebenso bezeichne

p die Wahrscheinlichkeit des A,

p_1 „ „ „ B,

von der Zeit des Eintrittes an die Vertheilung zu erleben. Da nun Beide dieselbe Einlage gemacht haben, so müssen auch ihre Erwartungswerthe gleich sein. Um diese zu bestimmen, sind rücksichtlich des A zwei Fälle möglich: entweder erhält er die Summe K allein, wofür die Wahrscheinlichkeit [1])

$$p(1-p_1),$$

oder er theilt sich mit B, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$pp_1;$$

in letzterem Falle erhält er den zu bestimmenden Antheil λ. Der Erwartungswerth des A ist demnach

$$p(1-p_1)K + \lambda pp_1K = K[p-(1-\lambda)pp_1].$$

Ebenso ergibt sich der Erwartungswerth des B, wenn wir darin μ mit λ und p_1 mit p vertauschen, nämlich

$$K[p_1-(1-\mu)pp_1].$$

Indem wir nun beide Werthe gleich setzen, verschwindet K durch Division, was bedeutet, dass die Verhältnisszahlen λ und μ von der zu vertheilenden Summe K ganz unabhängig sind, und wir erhalten

$$p-(1-\lambda)pp_1 = p_1-(1-\mu)pp_1.$$

Daraus folgt nun nach den Regeln der Mathematik

(1) $$(\lambda-\mu)pp_1 = p_1-p.$$

[1]) Vergl. **Dr. Albert Wild**, Grundsätze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung etc., München 1862.

Digitized by Google

Wollen wir nun λ und μ selbst bestimmen, so haben wir aus **(1)**

$$\lambda - \mu = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$$

und dazu noch

$$\lambda + \mu = 1,$$

so dass aus beiden Gleichungen sich ergibt

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right),$$

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right).$$

2) Für drei Personen.

Lassen wir die Serie aus drei Personen A, B, C bestehen und bezeichnen wieder beziehungsweise mit

$p, p_1 p_2$ die Wahrscheinlichkeit, die Theilung zu erleben,
$q, q_1 q_2$ „ „ sie nicht zu erleben,

so sind in Beziehung auf A vier Fälle möglich:

1) Entweder erhält A die Summe K allein, wofür die Wahrscheinlichkeit $p q_1 q_2$,
2) oder er theilt sich mit B, wofür die Wahrscheinlichkeit $p p_1 q_2$,
3) oder er theilt sich mit C, wofür die Wahrscheinlichkeit $p p_2 q_1$,
4) oder endlich er theilt sich mit B und C, wofür die Wahrscheinlichkeit $p p_1 p_2$ ist.

Bezeichnen wir beziehungsweise den Antheil des A in den letzten drei Fällen mit

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2,$$

so ist der Erwartungswerth desselben

$$p q_1 q_2 K + \lambda p p_1 q_2 K + \lambda_1 p p_2 q_1 K + \lambda_2 p p_1 p_2 K.$$

Aehnlich ergibt sich derselbe für B, wenn wir p mit p_1, q mit q_1 und λ mit μ vertauschen unter Berücksichtigung des Index

$$p_1 q q_2 K + \mu p_1 p q_2 K + \mu_1 p_1 p_2 q K + \mu_2 p p_1 p_2 K.$$

Digitized by Google

Diese beiden Ausdrücke sind wegen der gleichen Einlage einander gleich zu setzen; K verschwindet durch Division und wir erhalten durch Subtraction der beiden Ausdrücke

$$(\lambda_2-\mu_2)pp_1p_2 = (p_1q-pq_1)q_2-(\lambda-\mu)pp_1q_2 \\ -(\lambda_1pq_1-\mu_1p_1q)p_2;$$

oder auch, wenn man

$$q = 1-p \text{ und } q_1 = 1-p_1$$

substituirt in die beiden ersten Glieder zusammen nimmt

$$(\lambda_2-\mu_2)pp_1p_2 = [p_1-p-(\lambda-\mu)pp_1]q_2 \\ -(\lambda_1pq_1-\mu_1p_1q)p_2.$$

Berücksichtigt man noch, dass der in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck nach Gleichung **(1)** verschwindet, so fällt auch noch der Factor p_2 aus, und wir haben nun

(2) $$(\lambda_2-\mu_2)pp_1 = -(\lambda_1pq_1-\mu_1p_1q).$$

Diese Gleichung bezieht sich nur auf A und B; zwischen A und C würden wir analog erhalten

(3) $$(\lambda_2-\nu_2)pp_2 = -(\lambda'_1pq_2-\nu_1p_2q).$$

Ausserdem hätten wir zur Bestimmung der 3 Verhältnisszahlen zu den vorstehenden 2 Gleichungen noch eine dritte

$$\lambda_2+\mu_2+\nu_2 = 1,$$

so dass sie sich in jedem Falle berechnen liessen, wenn es nothwendig wäre. Hinsichtlich der Grössen λ_1, μ_1, ν_1, λ'_1 ist zu bemerken, dass sie nach Gleichung **(1)** folgende Werthe haben:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}\right),$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right),$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right),$$

$$\lambda'_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right);$$

Digitized by Google

indem λ_1 den Antheil des A, wenn A u. C sich theilen,
μ_1 „ „ „ B, „ B u. C „ „
ν_1 „ „ „ C, „ C u. B „ „
λ'_1 „ „ „ A, „ A u. B „ „
bedeutet. Die Gleichung **(2)** nimmt noch folgende Gestalt an, wenn

$$q = 1-p \text{ und } q_1 = 1-p_1$$

substituirt und mit pp_1 dividirt wird:

(3) $$\lambda_2-\mu_2 = \lambda_1-\mu_1 + \frac{\mu_1}{p} - \frac{\lambda_1}{p_1}.$$

Es bedeutet λ_2 den Antheil des A, wenn alle drei sich theilen, und λ_1 den Antheil des A, wenn B von der Theilung ausgeschlossen ist; ebenso bedeutet μ_2 den Antheil des B, wenn alle drei sich theilen und μ_1, wenn A ausgeschlossen ist.

3) Für vier Personen.

Die Serie bestehe nun aus den vier Mitgliedern A, B, C, D, so haben wir in Beziehung auf A, wenn wir die vorige Bezeichnung beibehalten und für D in demselben Sinne die Grössen

$$p_3, \; q_3$$

einführen, folgende 8 Fälle zu unterscheiden:

$pq_1q_2q_3$	die Wahrscheinlichkeit, dass	A	das Ganze erhält,		
$pp_1q_2q_3$	„ „ „	A	mit	B	theilt
$pp_2q_1q_3$	„ „ „	A	„	C	„
$pp_3q_1q_2$	„ „ „	A	„	D	„
$pp_1p_2q_3$	„ „ „	A	„	B u. C	„
$pp_1p_3q_2$	„ „ „	A	„	B u. D	„
$pp_2p_3q_1$	„ „ „	A	„	C u. D	„
$pp_1p_2p_3$	„ „ „	A	„	B, C u. D	„

Bezeichnen wir beziehungsweise den entsprechenden Antheil des A mit

$$\lambda, \; \lambda', \; \lambda'', \; \lambda_2, \; \lambda'_2, \; \lambda''_2, \; \lambda_3,$$

so ist seine Erwartung, wenn wir $K = 1$ setzen, weil wie schon bemerkt, diese Grösse keinen Einfluss auf λ hat,

Digitized by Google

$$p\,q_1\,q_2\,q_3 + \lambda\,p\,p_1\,q_2\,q_3 + \lambda'\,p\,p_2\,q_1\,q_3 + \lambda''\,p\,p_3\,q_1\,q_2 + \lambda_2\,p\,p_1\,p_2\,q_3 + \lambda_2'\,p\,p_1\,p_3\,q_2 + \lambda_2''\,p\,p_2\,p_3\,q_1 + \lambda_3\,p\,p_1\,p_2\,p_3.$$

Daraus erhalten wir den Erwartungswerth des B, wenn wir p mit p_1 und q mit q_1 vertauschen und μ anstatt λ schreiben und dieselben Indices lassen

$$p_1\,q\,q_2\,q_3 + \mu\,p\,p_1\,q_2\,q_3 + \mu'\,p_1\,p_2\,q\,q_3 + \mu''\,p_1\,p_3\,q\,q_2 + \mu_2\,p\,p_1\,p_2\,q_3 + \mu_2'\,p\,p_1\,p_3\,q_2 + \mu_2''\,p_1\,p_2\,p_3\,q + \mu_3\,p\,p_1\,p_2\,p_3.$$

Diese beiden Ausdrücke sind wieder gleich und geben durch Subtraction ein sehr einfaches Resultat. Dasselbe reducirt sich, wenn analog dem vorigen Falle die Gleichungen **(1)** und **(2)** berücksichtigt werden, auf

$$(\lambda_3 - \mu_3)\,p\,p_1\,p_2\,p_3 = -(\lambda_2''\,p\,q_1 - \mu_2''\,p_1\,q)\,p_2\,p_3$$

oder auch

(4) $$(\lambda_3 - \mu_3)\,p\,p_1 = -(\lambda_2''\,p\,q_1 - \mu_2''\,p_1\,q).$$

Und wenn man noch

$$q = 1 - p \text{ und } q_1 = 1 - p_1$$

substituirt und mit $p\,p_1$ dividirt

(5) $$(\lambda_3 - \mu_3) = \lambda_2'' - \mu_2'' + \frac{\mu_2''}{p} - \frac{\lambda_2''}{p_1}.$$

Käme es hier auf die Berechnung der Grössen λ_3 und μ_3 an, so liesse sich durch blosse Vertauschung der Wahrscheinlichkeiten zwischen je zwei Personen eine weitere Gleichung aufstellen und unter Berücksichtigung, dass die Summe aller Grössen der Einheit gleich ist, der Antheil eines jeden Mitgliedes bestimmen, indem λ_2 und μ_2 schon bekannte Grössen vorstellen. Weil es aber darauf nicht ankommt, so können wir sogleich auf den allgemeinen Fall übergehen und annehmen, die Serie bestehe aus n Mitgliedern.

4) Für n Personen.

Von diesen n Mitgliedern heben wir A und B heraus und heissen wie früher p und p_1 ihre Wahrscheinlichkeiten, die Theilung zu erleben. In der bisherigen Entwickelung hat sich immer gezeigt, dass durch Subtraction der Erwartungswerthe

Digitized by Google

des A und B alle Glieder bis auf 2 verschwunden sind, und so liegt der Inductionsschluss nahe, dass dieses auch bei n Mitgliedern der Fall sein wird. In der That ist dieses der Fall und gestattet eine Einfachheit der Untersuchung, wie man sie nur wünschen kann. Folgende Betrachtung wird dies klar machen.

Heissen wir den Antheil des A und B bei n Mitgliedern beziehungsweise

$$\lambda_n \text{ und } \mu_n,$$

so kann die Differenz

$$\lambda_n - \mu_n$$

nur von ihrer Wahrscheinlichkeit p und p_1 und zugleich von der Anzahl n abhängig oder mit andern Worten nur eine Function von den 3 Grössen

$$p,\ p_1 \text{ und } n$$

sein. Dieses sieht man auch noch deutlich aus der Gleichung, welche zwischen den Theilen sämmtlicher Mitglieder

$$(\lambda_n + \mu_n + \nu_n + \ldots + \varphi_n) = 1$$

besteht.

Würde man nun analog dem 4. Falle die Glieder der Erwartungswerthe des A und B bilden, so müssen sich durch Subtraction alle Glieder zerstören, welche nicht durch das Product aus den Wahrscheinlichkeiten aller Mitglieder ausser A und B

$$p_2 p_3 p_4 \ldots . p_n$$

theilbar sind, weil nämlich die Differenz der letzten 2 Glieder

$$(\lambda_n - \mu_n)\, p\, p_1 p_2 p_3 \ldots . p_n$$

wird, welche mit keinem andern Factor, als p und p_1 behaftet bleiben darf.

Von allen Gliedern, welche den Erwartungswerth des A bilden, gibt es ausser dem letzten Gliede nur noch jenes, welches den Partialwerth des A für den Fall ausdrückt, dass alle Mitglieder ausser B sich theilen; dieses Glied ist durch

$$\lambda_{n-1}\, p\, p_2 p_3 p_4 \ldots . p_n$$

dargestellt, worin λ_{n-1} den Antheil des A in diesem Falle

Digitized by Google

bedeutet. Auch für B gibt es ausser dem letzten nur noch das Glied

$$\mu_{n-1} p_1 p_2 p_3 \dots p_n ,$$

welches der Bedingung der Theilbarkeit entspricht. Die Differenz der Erwartungswerthe des A und B nimmt nun folgenden Werth an

$$(\lambda_n - \mu_n) p p_1 p_2 p_3 \dots p_n$$
$$= -(\lambda_{n-1} p q_1 - \mu_{n-1} p_1 q) p_2 p_3 p_4 \dots p_n ,$$

oder auch nach Division des gemeinschaftlichen Productes

(6) $$(\lambda_n - \mu_n) p p_1 = -(\lambda_{n-1} p q_1 - \mu_{n-1} p_1 q),$$

welcher noch durch die mehrfach erwähnte Substitution auf die Form

(7) $$\lambda_n - \mu_n = \lambda_{n-1} - \mu_{n-1} + \frac{\mu_{n-1}}{p} - \frac{\lambda_{n-1}}{p_1}$$

gebracht werden kann. Diese Gleichung setzt uns nun in den Stand, einen Satz aufzustellen, welcher die Grundlage aller weiteren Erörterungen bilden wird. Der Entwicklung zufolge bedeutet

λ_n den Antheil des A, wenn alle n Mitglieder sich theilen,
μ_n „ „ „ B, „ „ „ „ „ „
λ_{n-1} „ „ „ A, wenn alle ausser B sich theilen
μ_{n-1} „ „ „ B, „ „ „ „ A „ „

Stellt man nun Gleichung **(6)** in einer der beiden Formen

(8) $$\begin{cases} [(\lambda_n - \mu_n) - (\lambda_{n-1} - \mu_{n-1})] p p_1 = p_1 \mu_{n-1} - p \lambda_{n-1} \\ [(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (\mu_n - \mu_{n-1})] p p_1 = p_1 \mu_{n-1} - p \lambda_{n-1} \end{cases}$$

dar und setzt n die Anzahl der Mitglieder nur einiger Massen gross voraus, so wird man sich leicht überzeugen, dass die in Klammern stehenden Differenzen sehr klein und die ganze linke Seite $= 0$ gesetzt werden darf, ohne für die Praxis einen erheblichen Fehler zu begehen. In der That sind die daraus folgenden Resultate weit genauer, als jene, welche von der jetzigen Vollkommenheit der Sterblichkeits-Tabellen abhängig sind. Unter dieser Voraussetzung folgt demnach aus **(8)** der einfache Satz

(9) $$p \lambda_{n-1} = p_1 \mu_{n-1} .$$

Digitized by Google

Diese Relation gilt auch analog von je 2 andern Mitgliedern. Es kommt nun darauf an, eine Gleichung zwischen λ_n und μ_n, d. h. zwischen den Theilen des A und B, wenn alle n Mitglieder sich theilen, aufzustellen.

Bezeichnen wir zu diesem Ende die Antheile der noch übrigen Mitglieder mit

$$\nu_n \ldots\ldots \varphi_n \text{ und } \nu_{n-1} \ldots\ldots \varphi_{n-1},$$

so haben wir vermöge Gleichung (**9**)

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-1} &= \frac{p}{p}\,\lambda_{n-1},\\
\mu_{n-1} &= \frac{p}{p_1}\,\lambda_{n-1},\\
\nu_{n-1} &= \frac{p}{p_2}\,\lambda_{n\ 1},\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\varphi_{n-1} &= \frac{p}{p_n}\,\lambda_{n\ 1}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Summe der linken Seite mit s_{n-}, so erhalten wir durch Addition der n Gleichungen

$$s_{n-1} = p\,\lambda_{n\ 1}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{p_n}\right),$$

oder auch, wenn wir zur Abkürzung

$$S\left(\frac{1}{p_n}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}$$

schreiben

(10) $$s_{n-1} = p\,\lambda_{n-1} \times S\left(\frac{1}{p_n}\right),$$

worin weiter nichts bekannt ist als die Wahrscheinlichkeiten. Wir haben aber auch noch in (**8**) die linke Seite $= 0$ gesetzt oder, was dasselbe ist,

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-1} - \mu_{n-1} &= \lambda_n - \mu_n,\\
\lambda_{n-1} - \nu_{n-1} &= \lambda_n - \nu_n,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\lambda_{n-1} - \varphi_{n-1} &= \lambda_n - \varphi_n.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Nehmen wir dazu noch die identische Gleichung

$$\lambda_{n-1} - \lambda_{n-1} = \lambda_n - \lambda_n ,$$

so erhalten durch Addition der n Gleichungen und unter Berücksichtigung der Bedeutung von s_{n-1}

(11) $$n\lambda_{n-1} - s_{n-1} = n\lambda_n - 1 ,$$

indem, wie schon früher bemerkt wurde

$$\lambda_n + \mu_n + \nu_n + \ldots + \varphi_n = 1$$

sein muss. Aus **(10)** und **(11)** ergibt sich nun durch Elimination von s_{n-1}

(12) $$\lambda_{n-1} = \frac{n\lambda_n - 1}{n - pS\left(\frac{1}{p_n}\right)} .$$

Analog haben wir durch Vertauschung von λ mit μ und p mit p_1

$$\mu_{n-1} = \frac{n\mu_n - 1}{n - p_1 S\left(\frac{1}{p_n}\right)} .$$

Erfüllen wir jetzt die Gleichung (**9**) dadurch, dass wir die letztgefundenen Werthe einsetzen, so erhalten wir

(13) $$\begin{aligned}&(pn\lambda_n - p)\left[n - p_1 S\left(\frac{1}{p_n}\right)\right]\\ &= (p_1 n\mu_n - p_1)\left[n - pnS\left(\frac{1}{p_n}\right)\right] .\end{aligned}$$

Darin kommt nun keine unbekannte Grösse mehr vor als λ_n und μ_n; dazu lassen sich noch $(n-1)$ lineare Gleichungen durch blosse Vertauschung der Unbekannten aufstellen und demnach alle n Unbekannten berechnen. Allein für die Praxis wäre diese Berechnung nicht besonders angenehm. Denkt man sich in (**13**) ausmultiplizirt, so kommen 2 Glieder mit dem Factor n^2 vor und auch Glieder mit n und ohne n. Da aber n als eine 4zifferige Zahl angenommen werden darf, so überwiegen die mit n^2 behafteten Glieder alle andern so sehr, dass, wenn auch alle übrigen Glieder vernachlässigt werden, zum Mindesten die ersten 4 Stellen des Resultates richtig sind.

Digitized by Google

Da nun eine grössere Genauigkeit weder möglich noch nothwendig ist, so setzen wir alle übrigen Glieder $= 0$, und wir haben aus Gleichung (**13**)

$$p n^2 \lambda_n = p_1 n^2 \mu_n, \text{ das ist}$$

(14)
$$\begin{cases} p \lambda_n = p_1 \mu_n, \text{ oder auch} \\ \lambda_n : \mu_n = p_1 : p, \text{ das heisst:} \end{cases}$$

„die Antheile verhalten sich umgekehrt, wie die Wahrscheinlichkeiten, die Zeit der Vertheilung zu erleben."

Dadurch sind wir auf dem Standpunct angelangt, den wir schon bei Gelegenheit der Erörterungen über Tontinen stillschweigend als gerechtfertigt vorausgesetzt haben. Zugleich erhellt, dass die Vertheilungszahlen λ, μ, ν .... schon gefunden sind und die Vertheilung selbst ohne Schwierigkeit vollzogen werden kann nach der §. 98 aufgestellten Gleichung (**9**)

(15)
$$s_m = \frac{1}{p_m} \cdot \frac{K}{S\left(\frac{1}{p_x}\right)},$$

worin s_m den Antheil einer beim Eintritt $m$jährigen Person, K das Gesammt-Vermögen der Gesellschaft,

$$p_m = \frac{a_{m\ t}}{a_m}$$

die Wahrscheinlichkeit, die Zeit der Vertheilung zu erleben, bedeutet und $S\left(\frac{1}{p_x}\right)$ die Summe der reciproken Werthe aller Wahrscheinlichkeiten bezeichnet.

§. 112.

Die Ausführung der Vertheilung.

Um nun diese angedeutete Vertheilung an einem concreten Falle zu zeigen, nehmen wir an, es habe sich vor 10 Jahren a dato eine Gesellschaft gebildet und diese gegenwärtig über ein reines Vermögen von 289583 fl. 42 kr. zu verfügen, und es sei ferner die Gesellschaft im Begriffe, sich aufzulösen.

Digitized by Google

Es ist also die Frage zu erledigen, welchen Antheil jedes Mitglied rechtmässig beanspruchen darf, wenn alle gleiche Einlagen gemacht haben.

Um dieses auszuführen, haben wir vor Allem den Werth

$$S\left(\frac{1}{p_x}\right) = \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_q} + \ldots,$$

welcher allein eine etwas weitläufige Rechnung nothwendig macht, zu bestimmen, wozu wir die Sterblichkeitstafel nach Deparcieux und folgendes Verzeichniss der lebenden Mitglieder benützen.

Verzeichniss der lebenden Mitglieder.

Alter beim Eintritt.	Zahl der Mitglieder.	Zahl der Einlagen.	Alter beim Eintritt.	Zahl der Mitglieder.	Zahl der Einlagen.
10	1	1	36	29	50
11	3	4	37	31	41
12	2	2	38	35	49
13	5	7	39	40	61
14	5	6	40	37	60
15	6	8	41	39	70
16	4	4	42	28	40
17	9	10	43	39	65
18	10	15	44	19	30
19	4	4	45	42	71
20	6	10	46	25	41
21	2	2	47	36	50
22	12	15	48	41	69
23	5	7	49	31	52
24	10	15	50	13	30
25	13	20	51	27	31
26	6	10	52	30	45
27	15	20	53	12	30
28	12	15	54	14	31
29	23	30	55	17	40
30	40	50	56	13	30
31	24	30	57	6	20
32	30	40	58	5	15
33	27	31	59	3	12
34	12	19	60	1	5
35	23	30			1038
		405			

Digitized by Google

Für die Rechnung ist zu bemerken, dass nicht die Personen, sondern ihre Einlagen gezählt werden. Wenn 1 Mitglied z. B. 4 Einlagen macht, so wird es als 4 Mitglieder angesehen. Wir haben nun mit Hilfe der Sterblichkeitstafel von Deparcieux und mit Rücksicht auf die verzeichneten Einlagen

$$1 \cdot \frac{1}{p_{10}} = \frac{6004}{5558} = 1{,}0803$$
$$4 \cdot \frac{1}{p_{11}} = 4 \cdot \frac{5946}{5506} = 4{,}3196$$
$$2 \cdot \frac{1}{p_{12}} = 2 \cdot \frac{5897}{5453} = 2{,}1628$$
$$7 \cdot \frac{1}{p_{13}} = 7 \cdot \frac{5854}{5399} = 7{,}5915$$
$$6 \cdot \frac{1}{p_{14}} = 6 \cdot \frac{5815}{5344} = 6{,}5514$$
$$8 \cdot \frac{1}{p_{15}} = 8 \cdot \frac{5778}{5288} = 8{,}7416$$
$$4 \cdot \frac{1}{p_{16}} = 4 \cdot \frac{5740}{5231} = 4{,}3892$$
$$10 \cdot \frac{1}{p_{17}} = 10 \cdot \frac{5699}{5171} = 11{,}0211$$
$$15 \cdot \frac{1}{p_{18}} = 15 \cdot \frac{5655}{5116} = 16{,}5802$$
$$4 \cdot \frac{1}{p_{19}} = 4 \cdot \frac{5608}{5060} = 4{,}4332$$
$$10 \cdot \frac{1}{p_{20}} = 10 \cdot \frac{5558}{5005} = 11{,}1030$$
$$2 \cdot \frac{1}{p_{21}} = 2 \cdot \frac{5506}{4951} = 2{,}2242$$
$$15 \cdot \frac{1}{p_{22}} = 15 \cdot \frac{5453}{4897} = 16{,}7031$$
$$7 \cdot \frac{1}{p_{23}} = 7 \cdot \frac{5399}{4844} = 7{,}8020$$
$$15 \cdot \frac{1}{p_{24}} = 15 \cdot \frac{5344}{4792} = 16{,}7280$$
$$20 \cdot \frac{1}{p_{25}} = 20 \cdot \frac{5288}{4740} = 22{,}3124$$
$$10 \cdot \frac{1}{p_{26}} = 10 \cdot \frac{5231}{4688} = 11{,}1583$$
$$20 \cdot \frac{1}{p_{27}} = 20 \cdot \frac{5173}{4637} = 22{,}3120$$
$$15 \cdot \frac{1}{p_{28}} = 15 \cdot \frac{5116}{4587} = 16{,}7299$$
$$30 \cdot \frac{1}{p_{29}} = 30 \cdot \frac{5060}{4538} = 33{,}4650$$
$$50 \cdot \frac{1}{p_{30}} = 50 \cdot \frac{5005}{4490} = 55{,}7350$$
$$30 \cdot \frac{1}{p_{31}} = 30 \cdot \frac{4951}{4441} = 33{,}4455$$
$$40 \cdot \frac{1}{p_{32}} = 40 \cdot \frac{4897}{4392} = 44{,}5984$$
$$31 \cdot \frac{1}{p_{33}} = 31 \cdot \frac{4844}{4342} = 34{,}5839$$
$$19 \cdot \frac{1}{p_{34}} = 19 \cdot \frac{4792}{4291} = 21{,}2192$$
$$30 \cdot \frac{1}{p_{35}} = 30 \cdot \frac{4740}{4239} = 33{,}5457$$

450,5365

Digitized by Google

$$50 \cdot \frac{1}{p_{36}} = 50 \cdot \frac{4688}{4186} = 55{,}9960$$

$$41 \cdot \frac{1}{p_{37}} = 41 \cdot \frac{4637}{4132} = 46{,}0008$$

$$49 \cdot \frac{1}{p_{38}} = 49 \cdot \frac{4587}{4077} = 55{,}1294$$

$$61 \cdot \frac{1}{p_{39}} = 61 \cdot \frac{4538}{4021} = 68{,}8446$$

$$60 \cdot \frac{1}{p_{40}} = 60 \cdot \frac{4490}{3964} = 67{,}9620$$

$$70 \cdot \frac{1}{p_{41}} = 70 \cdot \frac{4441}{3905} = 79{,}6110$$

$$40 \cdot \frac{1}{p_{42}} = 40 \cdot \frac{4392}{3843} = 45{,}7160$$

$$65 \cdot \frac{1}{p_{43}} = 65 \cdot \frac{4342}{3777} = 72{,}4248$$

$$30 \cdot \frac{1}{p_{44}} = 30 \cdot \frac{4291}{3707} = 34{,}7262$$

$$71 \cdot \frac{1}{p_{45}} = 71 \cdot \frac{4239}{3631} = 82{,}8889$$

$$41 \cdot \frac{1}{p_{46}} = 41 \cdot \frac{4186}{3550} = 48{,}3570$$

$$50 \cdot \frac{1}{p_{47}} = 50 \cdot \frac{4132}{3465} = 59{,}7845$$

$$69 \cdot \frac{1}{p_{48}} = 69 \cdot \frac{4077}{3377} = 83{,}3037$$

$$52 \cdot \frac{1}{p_{49}} = 52 \cdot \frac{4021}{3286} = 63{,}6324$$

$$30 \cdot \frac{1}{p_{50}} = 30 \cdot \frac{3964}{3191} = 37{,}2672$$

$$31 \cdot \frac{1}{p_{51}} = 31 \cdot \frac{3905}{3092} = 39{,}1821$$

$$45 \cdot \frac{1}{p_{52}} = 45 \cdot \frac{3843}{2992} = 57{,}7980$$

$$30 \cdot \frac{1}{p_{53}} = 30 \cdot \frac{3777}{2885} = 39{,}2760$$

$$31 \cdot \frac{1}{p_{54}} = 31 \cdot \frac{3707}{2778} = 41{,}3667$$

$$40 \cdot \frac{1}{p_{55}} = 40 \cdot \frac{3631}{2669} = 54{,}4188$$

$$30 \cdot \frac{1}{p_{56}} = 30 \cdot \frac{3550}{2559} = 41{,}6178$$

$$20 \cdot \frac{1}{p_{57}} = 20 \cdot \frac{3465}{2448} = 28{,}3022$$

$$15 \cdot \frac{1}{p_{58}} = 15 \cdot \frac{3377}{2336} = 51{,}6844$$

$$12 \cdot \frac{1}{p_{59}} = 12 \cdot \frac{3286}{2223} = 17{,}7384$$

$$5 \cdot \frac{1}{p_{60}} = 5 \cdot \frac{3191}{2109} = 7{,}5650$$

$$1280{,}5939$$

Wir haben nun 1443 Einlagen, und

$$S\left(\frac{1}{p_x}\right) = 450{,}5365 + 1280{,}5939 = 1731{,}1304,$$

$$\frac{K}{S\left(\frac{1}{p_x}\right)} = \frac{289583{,}7}{1731{,}1304} = 167{,}28.$$

Digitized by Google

Mit diesem Werthe ist es ein Leichtes, nach Gleichung (**15**)

$$s_m = \frac{1}{p_m} \cdot \frac{K}{S\left(\frac{1}{p_x}\right)} = \frac{1}{p_m} \cdot 167{,}28$$

den Antheil eines jeden Mitgliedes zu berechnen. So trifft einem zur Zeit des Beitrittes 30jährigen, also gegenwärtig 40jährigen Mitgliede der Antheil für nur Eine volle Einlage:

$$s_{30} = \frac{1}{p_{30}} \cdot 167{,}28 = \frac{5005}{4490} \cdot 167{,}28$$
$$= 186{,}467 \text{ fl.} = 186 \text{ fl. } 28 \text{ kr.}$$

Verfährt man ebenso für jedes Alter, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

Alter.	Antheil.	Alter.	Antheil.	Alter.	Antheil.
	fl.		fl.		fl.
10	180,712	27	186,620	44	193,633
11	180,645	28	186,572	45	195,291
12	180,896	29	186,600	46	197,295
13	181,315	30	186,467	47	199,995
14	182,632	31	186,492	48	201,957
15	182,766	32	186,510	49	203,008
16	183,436	33	186,619	50	206,109
17	184,359	34	186,818	51	209,571
18	184,894	35	187,051	52	213,161
19	185,396	36	187,338	53	219,002
20	185,731	37	187,683	54	223,220
21	186,032	38	188,205	55	227,579
22	186,266	39	188,792	56	232,061
23	186,466	40	189,478	57	236,720
24	186,550	41	190,247	58	241,825
25	186,621	42	191,184	59	247,273
26	186,655	43	192,303	60	253,094

Nach dieser Tabelle lässt sich deutlich erkennen, dass die schon früher besprochene Classen-Eintheilung eine Benachtheiligung einzelner Mitglieder zur Folge hat, welche durchaus nicht so geringfügig ist, dass sie vernachlässigt werden könnte.

Digitized by Google

Fassen wir die Alter von 10 zu 10 Jahren in 1 Classe zusammen, so beträgt der Unterschied der Antheile eines 50 und 60jährigen Mitgliedes für 1 Einlage nahezu 47 fl., und für 3 Einlagen 141 fl., was keine Kleinigkeit mehr ist.

Die Classen niederen Alters zeigen zwar theilweise ganz geringe Differenzen, welche an und für sich kaum der Rede werth sind; allein man muss auch bedenken, dass solche Mitglieder früher oder später in Folge des Aussterbens der älteren in ein ganz ähnliches Verhältniss kommen, indem diese jüngeren Mitglieder von selbst in ein Alter vorrücken, wo es nicht mehr gleichgiltig ist, ob ein 50jähriges Mitglied denselben Antheil erhält, als ein 60jähriges. Jene Mitglieder, welche ein noch höheres Alter erreichen, erleiden natürlich einen noch grösseren Nachtheil.

Der Plan, welcher der Rechnung zu Grunde gelegt wurde, enthält auch nichts Ungeräumtes oder der Wirklichkeit Widerstrebendes, was eine mildere Auffassung zulassen könnte. Es kam uns darauf an, diesen in die Augen springenden Nachtheil in Zahlen darzuthun, und hauptsächlich aus diesem Grunde haben wir uns der Mühe unterzogen, welche die Herstellung einer solchen Tabelle erfordert.

Auch lässt sich daraus zugleich einsehen, dass die gemeinschaftliche Verwaltung des Gesellschafts-Capitals einer einzelnen Serie mit grösserer Gleichförmigkeit und Vereinfachung sich handhaben lässt, und dass es durchaus nicht nothwendig ist, dasselbe classenweise zu trennen und für jedes Mitglied einen besonderen Conto zu führen. Ausserdem scheint diese angezeigte Behandlung noch einen Vortheil rücksichtlich des Reservefonds zu gewähren. Denn es ist an sich klar, dass ein reich dotirter Reservefond nicht zum Vortheil der Gesellschaft ausfallen kann, sondern dem Wachsen der Jahresrenten hinderlich sein wird; und somit ist jede Minderung desselben schon vom Vortheil. Kann aber eine solche Verminderung nicht durch gemeinschaftliche Verwaltung, durch das Verschmelzen aller Partial-Capitale bewirkt werden, so muss man überhaupt darauf verzichten. Eine geschickte und umsichtige

Digitized by Google

Verwaltung kann hierin offenbar sehr viel leisten, und zum Gedeihen und Aufschwung solcher Anstalten wesentlich beitragen. Zu einer solchen Leitung sind viele practische Erfahrungen, Einsicht in die Verhältnisse und Zustände und Vorsicht bei Gewinn verheissenden Operationen unbedingt nothwendig; hier muss die Theorie den Erfahrungen weichen.

§. 113.

Bestimmung der Einlage bei gleichmässiger Vertheilung.

Schon bei Gelegenheit der Sparkassen-Tontinen haben wir den Fall zu behandeln gehabt, dass die Theilnehmer eine ihrem Alter entsprechende Einlage machen und bei der Vertheilung einen gleichmässigen Antheil erhalten. Dort haben wir den Grundsatz gleichsam als selbstverständlich aufgestellt:

„die Einlagen verhalten sich, wie die Wahrscheinlichkeiten, die Zeit der Vertheilung zu erleben."

Nun wollen wir auch nachweisen, in wie weit dieser Grundsatz Giltigkeit hat.

I. Fall. Es bestehe die Gesellschaft aus 2 Personen, A und B, welche zur Zeit des Eintrittes im Alter m und n standen und beziehungsweise eine Wahrscheinlichkeit p_m und p_n haben, die Zeit der Vertheilung zu erleben. Bezeichnen wir mit

P die Einlage des A und mit

Q „ „ „ B,

so besteht unsre Aufgabe darin, beide Erwartungswerthe zu bestimmen und diese der Einlage gleich zu setzen, woraus sich dann das Verhältniss der beiden Einlagen ergeben wird. Der Erwartungswerth des A besteht aus 2 Theilen:

1) Entweder erhält er das ganze Capital, wofür die Wahrscheinlichkeit

$$p_m(1-p_n) = p_m - p_m p_n \text{ besteht,}$$

2) oder er theilt sich mit B darein und erhält die Hälfte des Ganzen. Für letzteren Fall ist die Wahrscheinlichkeit

$$= p_m p_n .$$

Digitized by Google

Setzen wir das zu vertheilende Capital

$$K = 1,$$

und bezeichnen wir den Erwartungswerth des A und B beziehungsweise mit

$$E_m \text{ und } E_n,$$

so haben wir für A

$$\textbf{(1)} \quad E_m = p_m - p_m p_n + \frac{1}{2} p_m p_n = p_m - \frac{1}{2} p_m p_n,$$

und für B erhalten wir den entsprechenden Ausdruck, wenn wir p_n mit p_m vertauschen,

$$\textbf{(2)} \quad E_n = p_n - \frac{1}{2} p_m p_n.$$

Und vermöge der Proportion

$$P : Q = E_m : E_n$$

haben wir das gesuchte Verhältniss

$$\textbf{(3)} \quad P : Q = \left(p_m - \frac{1}{2} p_m p_n\right) : \left(p_n - \frac{1}{2} p_m p_n\right).$$

Das Verhältniss der Einlagen ist also nicht

$$= p_m : p_n;$$

wann dieses Statt findet, werden wir bald sehen.

Beispiel. Ein 30 und ein 45jähriger Mann legen eine gewisse Summe zusammen, gegen welche eine Renten-Anstalt nach 10 Jahren eine gewisse Summe ausbezahlen will, wenn Beide oder Einer von ihnen bis dorthin am Leben sein wird. Was hat B zu leisten, wenn A 600 fl. gibt und Beide gleiche Ansprüche haben?

Nach der Sterblichkeitstafel von Deparcieux ist

$$p_{30} = \frac{4490}{5005} = 0{,}8971\,; \; p_{45} = \frac{3631}{4239} = 0{,}8566\,;$$

folglich

$$p_{30} - \frac{1}{2} p_{30} p_{45} = 0{,}8971 - 0{,}3842 = 0{,}5129\,;$$

und

$$p_{45} - \frac{1}{2} p_{30} p_{45} = 0{,}8566 - 0{,}3842 = 0{,}4724.$$

Digitized by Google

Zur Bestimmung von Q haben wir nach Gleichung (3)

$$600 : Q = 0{,}5129 : 0{,}4724,$$

$$Q = \frac{2834400}{5129} = 552{,}62 \text{ fl.},$$

während wir nach der Annahme

$$P : Q = p_m : p_n,$$

$$Q = 572{,}76 \text{ fl.}$$

erhalten würden.

II. Fall. Fügen wir zu den vorigen zwei Personen noch eine dritte C des Alters r bei unter übrigens denselben Umständen, wie vorhin, so haben wir in Beziehung auf A folgende 4 Fälle zu unterscheiden:

1) Entweder erhält er das Ganze mit der Wahrscheinlichkeit
$$= p_m (1-p_n)(1 \quad p_r),$$
2) oder er theilt sich mit B, wofür die Wahrscheinlichkeit besteht
$$= p_m p_n (1-p_r),$$
3) oder er theilt sich mit C mit einer Wahrscheinlichkeit
$$= p_m p_r (1-p_n),$$
4) oder endlich, es theilen sich alle 3 zu gleichen Theilen in das Ganze, wofür wir eine Wahrscheinlichkeit
$$= p_m p_n p_r \text{ haben.}$$

Der Erwartungswerth des A ist demnach dargestellt durch

$$E_m = p_m (1-p_n)(1-p_r) + \frac{1}{2} p_m p_n (1-p_r)$$

$$+ \frac{1}{2} p_m p_r (1-p_n) + \frac{1}{3} p_m p_n p_r,$$

oder auch, wenn man die angedeutete Multiplication ausführt und summirt,

(4) $$E_m = p_m - \frac{1}{2} p_m (p_n + p_r) + \frac{1}{3} p_m p_n p_r.$$

Den entsprechenden Ausdruck für B erhält man daraus durch Vertauschung von p_m mit p_n, nämlich

Digitized by Google

$$(5) \qquad E_n = p_n - \frac{1}{2}\, p_n (p_m + p_r) + \frac{1}{3}\, p_m p_n p_r \,.$$

Jenen für C wollen wir gar nicht in Betracht ziehen.

Aus (4) und (5) ergibt sich unmittelbar das Verhältniss

$$(6) \qquad \begin{aligned} E_m : E_n = p_m \Big[1 - \frac{1}{2}(p_n + p_r) + \frac{1}{3} p_n p_r\Big] \\ : p_n \Big[1 - \frac{1}{2}(p_m + p_r) + \frac{1}{3} p_n p_r\Big] \,. \end{aligned}$$

Beispiel. Drei Personen A, B und C im Alter 30, 45 und 40 Jahre, lassen sich unter ganz gleichen Ansprüchen auf Antheil ein gewisses Capital versichern, welches nach 10 Jahren zu erheben ist, sobald wenigstens Einer von ihnen bis dorthin am Leben sein wird. Welche Einlage hat B zu machen, wenn die des A 600 fl. beträgt?

Wir haben mit Hilfe der bereits citirten Sterblichkeitstafel

$$p_{30} = \frac{4490}{5005} = 0{,}8971\,;\; p_{45} = \frac{3631}{4239} = 0{,}8566\,,$$

$$p_{40} = \frac{3964}{4490} = 0{,}8828.$$

Mit diesen Werthen ergibt sich nach (4) und (5)

$$\begin{aligned} E_{30} &= 8971 - (0{,}3959 + 0{,}3842) + 0{,}2261 \\ &= 0{,}3430\,, \\ E_{45} &= 0{,}8566 - (0{,}3844 + 0{,}3781) + 0{,}2261 \\ &= 0{,}3202\,; \end{aligned}$$

und in Beziehung auf Gleichung (6) wegen $P = 600$:

$$600 : Q = 0{,}3430 : 0{,}3202\,,$$

$$Q = \frac{1921200}{3430} = 560{,}11 \text{ fl.}$$

III. Fall. Zu den vorigen drei Personen fügen wir noch eine vierte D des Alters 5 Jahre und lassen im Uebrigen die Umstände die nämlichen, so haben wir, den Erwartungswerth des A zu bestimmen, folgende Fälle zu unterscheiden. A erhält

Digitized by Google

1) das Ganze, wenn er allein am Leben bleibt,
2) die Hälfte, wenn nur A und B oder
A „ C „
A „ D
zur Vertheilung gelangen;
3) den dritten Theil, wenn A, B und C oder
A, B „ D „
A, C „ D
am Leben bleiben;
4) den vierten Theil, wenn alle 4 zur Vertheilung kommen.

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für jeden dieser Fälle sind der Reihe nach:

$$1)\quad p_m(1-p_n)(1-p_r)(1-p_s),$$

$$2)\quad \begin{cases} p_m p_n (1-p_r)(1-p_s), \\ p_m p_r (1-p_n)(1-p_s), \\ p_m p_s (1-p_n)(1-p_r), \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} p_m p_n p_r (1-p_s), \\ p_m p_n p_s (1-p_r), \\ p_m p_r p_s (1-p_n), \end{cases}$$

$$4)\quad p_m p_n p_r p_s .$$

Wenn man nun diese Producte in Summen verwandelt, von den einzelnen Nummern die entsprechenden Antheile

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}$$

nimmt, so erhält man als Erwartungswerth des A

$$E_m = p_m - \frac{1}{2} p_m (p_n + p_r + p_s)$$

$$(7)\qquad + \frac{1}{3} p_m (p_n p_r + p_n p_s + p_n p_s) - \frac{1}{4} p_m p_n p_r p_s .$$

Durch Vertauschung von p_n mit p_m erhalten wir analog den Erwartungswerth des B

$$E_n = p_n - \frac{1}{2} p_n (p_m + p_r + p_s)$$

$$(8)\qquad + \frac{1}{3} p_n (p_m p_r + p_m p_s + p_r p_s) - \frac{1}{4} p_m p_n p_r p_s .$$

Digitized by Google

Mit Hilfe der in (7) und (8) aufgestellten Werthe lässt sich das Verhältniss zwischen den Einlagen des A und B nach Proportion

$$P : Q = E_m : E_n$$

unmittelbar bestimmen.

Beispiel. Anknüpfend an das vorige Beispiel sei noch D 35 Jahre alt, das Uebrige das Nämliche, so haben wir

$$p_{30} = 0{,}8971; \quad p_{35} = 0{,}8943;$$
$$p_{45} = 0{,}8566; \quad p_{40} = 0{,}8828.$$

Der in (7) verzeichnete Ausdruck wird nun

$$\begin{aligned} E_{30} &= 0{,}8971 - (0{,}4011 + 0{,}3959 + 0{,}3843) \\ &\quad + (0{,}2361 + 0{,}2290 + 0{,}2261) - 0{,}1516, \\ &= 0{,}8971 - 1{,}1813 + 0{,}6912 - 0{,}1516, \\ &= 0{,}2554. \end{aligned}$$

Analog ergibt (8) zufolge

$$\begin{aligned} E_{45} &= 0{,}8566 - (0{,}3842 + 0{,}3781 + 0{,}3830) \\ &\quad + (0{,}2261 + 0{,}2290 + 0{,}2254) - 0{,}1516, \\ &= 0{,}8566 - 1{,}1453 + 0{,}6806 - 0{,}1516, \\ &= 0{,}2403. \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen haben wir, um Q den Einsatz des B zu bestimmen

$$600 : Q = 0{,}2554 : 0{,}2403,$$

also

$$Q = \frac{1441800}{2554} = 564{,}55 \text{ fl.}$$

In den 3 vorangehenden Beispielen haben wir den Einsatz des A constant gelassen und darnach den des B berechnet. Diese 3 gefundenen Werthe sind der Reihe nach

$$552{,}62; \quad 560{,}11; \quad 564{,}55.$$

Bemerken wir, dass diese 3 Resultate dem Werthe nach steigen, dass ferner die im ersten Beispiele gemachte Annahme

$$P : Q = p_m : p_n$$

den Werth $Q = 572{,}76$ zur Folge hatte, so lässt sich ver-

Digitized by Google

muthen, dass mit dem Wachsen der Zahl der Mitglieder eine stetige Annäherung an das Verhältniss

$$p_m : p_n$$

zwischen den Grössen P und Q eintrete. Dass dieses thatsächlich sich so verhalte, wollen wir in nachfolgendem allgemeinen Falle beweisen.

IV. Allgemeiner Fall. Nehmen wir an, die Gesellschaft bestehe aus n Mitgliedern beziehungsweise in dem Alter von m, q, r, s etc. Jahren, so können wir entweder den vorausgeschickten Weg einschlagen, oder sogleich an den unmittelbar vorhergehenden Fall anknüpfen.

Wir wählen der Einfachheit wegen das Letztere und bemerken, dass der Erwartungswerth jeder Person nach dem in (7) und (8) indicirten Gesetze aus n Gliedern mit abwechselnden Vorzeichen bestehen wird, welche der Reihe nach mit den Coeffizienten

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{1}{n}$$

behaftet sind.

Fassen wir zunächst das $m$jährige Mitglied A ins Auge und setzen, wie bisher, das zu vertheilende Capital

$$K = 1,$$

so besteht das erste Glied aus p_m,

das zweite aus $$-\frac{1}{2} p_m (p_q + p_r + p_s + \ldots.),$$

das dritte aus $$+\frac{1}{3} p_m (p_q p_r + p_q p_s + p_r p_s + \ldots.),$$

wobei die in Klammer stehende Summe aus den Producten von je zwei aller übrigen $(n-1)$ Wahrscheinlichkeiten besteht;

das vierte aus $$-\frac{1}{4} p_m (p_q p_r p_s + \ldots.),$$

wobei die Klammer so viele Glieder enthält, als sich Combinationen zu 3 aus $(n-1)$ Grössen bilden lassen;

das nächste Glied enthält in Klammer alle möglichen Combinationen zu 4 aus $(n-1)$ Grössen u. s. f. bis zum letzten Gliede

Digitized by Google

gleich dem $n$ten Theile des aus allen n Wahrscheinlichkeiten bestehenden Productes, also

$$= \frac{1}{n}\, p_m\, p_q\, p_r\, p_s \ldots .$$

Um eine grössere Einfachheit in diesen $n$gliedrigen complizirten Ausdruck zu bringen, genügt es, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, wenn wir ausser A noch das $q$jährige Mitglied B hervorheben und die übrigen $(n-2)$ Mitglieder gleich alt annehmen. Bezeichnen wir dieses Alter mit s, so nehmen die vorigen Glieder der Reihe nach folgende Gestalt an, wenn wir noch die Producte, welche die Factoren $p_m\, p_q$ enthalten, von den übrigen trennen

1tes Glied $= p_m$

$$2\text{tes Glied} = -\frac{1}{2}\, p_m p_q - \frac{1}{2}\,(n-2)\, p_m p_s$$

$$3\text{tes Glied} = +\frac{1}{3}\, p_m p_q\,(n-2)\, p_s + \frac{1}{3}\, p_m \frac{(n-2)\,(n-3)}{1.2}\,(p_s)^2$$

$$4\text{tes Glied} = -\frac{1}{4}\, p_m\, p_q \frac{(n-2)\,(n-3)}{1.2}\,(p_s)^2 - \frac{1}{4}\, p_m \frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.2.3}\,(p_s)^3$$

$$5\text{tes Glied} = +\frac{1}{5}\, p_m\, p_q \frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.2.3}\,(p_s)^3 + \frac{1}{5}\, p_m \frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1.2.3.4}\,(p_s)^4$$

$$\vdots$$

$$n\text{tes Glied} = \frac{1}{n}\, p_m\, p_q\,(p_s)^{n-2}.$$

Sondern wir die mit p_q behafteten Glieder von den übrigen ab, so erhalten wir für den Erwartungswerth des A folgende 2 Reihen

$$E_m = p_m - p_m\, p_q \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,(n-2)\, p_s + \frac{1}{4}\,\frac{(n-2)\,(n-3)}{1.2}\,(p_s)^2 - \ldots\right] - p_m \left[\frac{n-2}{2}\, p_s - \frac{1}{3}\,\frac{(n-2)\,(n-3)}{1.2}\,(p_s)^2 + \ldots\right].$$

Digitized by Google

Die Summation dieser beiden Reihen geschieht mit Hilfe der Binomialreihe [1]) und wir erhalten

$$E_m = p_m + p_m p_q \left[\frac{(1-p_s)^{n-1}}{(n-1)p_s} - \frac{1-(1-p_s)^n}{n(n-1)(p_s)^2}\right] - p_m\left[1 - \frac{1-(1-p_s)^{n-1}}{(n-1)p_s}\right],$$

oder auch

$$(9)\quad E_m = p_m \frac{1-(1-p_s)^{n-1}}{(n-1)p_s} + p_m p_q \left[\frac{(1-p_s)^{n-1}}{(n-1)p_s} - \frac{1-(1-p_s)^n}{n(n-1)(p_s)^2}\right].$$

Diese Formel ist streng richtig und geht für

$$n = 3,$$

das heisst, wenn wir die Gesellschaft aus 3 Mitgliedern bestehen lassen, in die schon bekannte, in (**1**) aufgestellte Gleichung über,

$$E_m = p_m - \frac{1}{2} p_m (p_q + p_s) + \frac{1}{3} p_m p_q p_s ,$$

wenn wir die abweichende Bezeichnung des Alters unberücksichtigt lassen. Um aber auf die Erledigung der Frage zurückzukommen, wann und unter welcher Bedingung das Verhältniss der Einlagen dem Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten gleich gesetzt werden darf, haben wir n die Anzahl der Mit-

---

[1]) Aus der bekannten Binomialreihe

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

folgt, wenn man 1 beiderseits abzieht und mit nx dividirt

$$\frac{1-(1-x)^n}{nx} = 1 - \frac{n-1}{2}x + \frac{1}{3}\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^2 + \ldots$$

oder wenn man $(n-1)$ anstatt n schreibt:

$$\frac{1-(1-x)^{n-1}}{(n-1)x} = 1 - \frac{n-2}{2}x + \frac{1}{3}\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^2 + \ldots$$

Ebenso findet sich auch:

$$\frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)x} + \frac{(1-x)^{n-1}}{n(n-1)x^2}$$

$$= -\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(n-2)x + \frac{1}{4}\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^2 - \ldots.\right]$$

Digitized by Google

glieder ins Auge zu fassen. Diese Anzahl können wir der Wirklichkeit entsprechend immer annehmen, dass sie nicht unter 1000 betragen wird. Setzen wir

$$n = 1001,$$

nehmen wir ferner an, es sei, um für Gleichung (**9**) einen wirklichen Fall zu haben,

$$p_m = 0{,}8;\ p_q = 0{,}6 \text{ und } p_s = 0{,}7,$$

so wird

$$(1-p_s)^{n-1} = (0{,}3)^{1000}, \text{ ebenso } (1-p_s)^n = (0{,}3)^{1001}$$

eine so kleine Grösse, dass sie für die Praxis jeder Darstellung entbehrt und füglich = 0 gesetzt werden muss. Dieses bleibt auch noch wahr für jeden andern Werth von p_s, weil er in Wirklichkeit immer ein ächter Bruch ist. Wir dürfen daher mit vollem Rechte anstatt Gleichung (**9**) folgende einfachere aufstellen

$$\textbf{(10)} \qquad E_m = \frac{p_m}{(n-1)p_s} - \frac{p_m p_q}{n(n-1)(p_s)^2}.$$

Daraus erhalten wir den Erwartungswerth des $q$jährigen Mitgliedes B, wenn wir p_q mit p_m vertauschen, mithin

$$\textbf{(11)} \qquad E_q = \frac{p_q}{(n-1)p_s} - \frac{p_m p_q}{n(n-1)(p_s)^2}.$$

Nun ist aber vermöge der angenommenen Werthe das zweite Glied

$$\frac{p_m p_q}{n(n-1)(p_s)^2} = \frac{0{,}48}{0{,}49 \,.\, 1000 \,.\, 1001} = 0{,}000001,$$

im Verhältnisse zum ersten Gliede wieder eine so kleine Grösse, dass sie für die Praxis ebenfalls vernachlässigt werden darf. Wir haben daher für die Erwartungswerthe der Mitglieder A und B die einfachen Resultate

$$\textbf{(12)} \qquad \begin{cases} E_m = \dfrac{p_m}{(n-1)p_s}, \\ E_q = \dfrac{p_q}{(n-1)p_s}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Vermöge dieser Werthe sind wir endlich in den Stand gesetzt, das Verhältniss der Einlagen in einer ganz einfachen Proportion darzustellen. Denn es ist

$$E_m : E_q = \frac{p_m}{(n-1)p_s} \cdot \frac{p_q}{(n-1)p_s}$$
$$= p_m : p_q ,$$

oder auch wegen

$$P : Q = E_m : E_q ,$$
$$\textbf{(13)} \qquad P : Q = p_m : p_n ,$$

das heisst, die Einlagen verhalten sich, wie die Wahrscheinlichkeiten, die Zeit der Vertheilung zu erleben.

Die Wahrheit dieses Satzes hängt von der Grösse n, der Anzahl der Mitglieder ab, und wird, wenn n nur einiger Massen gross ist, durchaus nicht alterirt, wenn wir unsre Annahme, dass die übrigen Mitglieder, ausser A und B, gleich alt sein sollen, umstossen wollten. Denn nehmen wir an, die übrigen Mitglieder haben verschiedenes Alter, so lässt sich immer ein idealer Mittelwerth p_s annehmen, welcher sowohl den Summenwerth liefert, als auch der Voraussetzung

$$p_s < 1$$

unter jeder Bedingung genügt.

§. 114.

Bestimmung der Jahresrente.

Wir haben in dem Vorausgehenden angenommen, die Gesellschaft wolle sich auflösen, und demgemäss ein Princip aufgestellt, nach welchem der Antheil jedes Einzelnen zu bestimmen ist. Die Gesellschaft will aber fortbestehen und steigende Jahres-Renten beziehen. Demnach kommt es hier darauf an, den ganzen Antheil des Einzelnen in eine solche Rente aufzulösen. Um dieses auszuführen, gibt es eine Unzahl Mittel und Wege. Um aber auch hier jede Willkühr auszuschliessen und den Ansprüchen jedes Einzelnen gerecht zu werden, ist der Antheil s am Ende jedes Geschäftsjahres

Digitized by Google

herzustellen und daraus die jedesmalige Rente so zu bestimmen, dass keines der Mitglieder im Vortheil oder Nachtheil ist.

Um die Sache besser erörtern zu können, heben wir ein $m$jähriges Mitglied heraus und heissen

k die gleichbleibende Jahresrente,
d den jährlichen Zuwachs derselben und
s_m den gegenwärtigen Werth

aller zu beziehenden Jahresrenten. Nach dieser Voraussetzung sind die einzelnen Jahresrenten folgende

$$k,\ k+d,\ k+2d,\ k+3d,\ \text{etc.}$$

und ihr gegenwärtiger Werth muss s_m gleich sein, so dass wir folgende Gleichung haben

$$s_m = \frac{a_{m+1}}{a_m} k\varrho + \frac{a_{m+2}}{a_m}(k+d)\varrho^2 + \frac{a_{m+3}}{a_m}(k+2d)\varrho^3 + \ldots.$$

Weil sich aber diese Summe rechter Hand in keinem geschlossenen Ausdruck darstellen lässt, und weil es nicht so sehr auf den absoluten Werth, als vielmehr auf das Verhältniss solcher Summen für verschiedene Mitglieder ankommt, so kann ein Näherungswerth genügen, welcher der wahrscheinlichen Lebensdauer entspricht.

Bezeichnen wir die wahrscheinliche Lebensdauer mit t, welche für jedes Alter unveränderlich ist, so haben wir folgende Reihe zu summiren

$$k\varrho + (k+d)\varrho^2 + (k+2d)\varrho^3 + \ldots. + (k+(t-1)d)\varrho^t,$$

deren Werth wir schon früher hergestellt haben, und erhalten

$$\textbf{(1)}\quad s_m = k\varrho\frac{1-\varrho^t}{1-\varrho} + d\left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2[1-t\varrho^{t-1}+(t-1)\varrho^t].$$

In dieser Gleichung ist s_m als Gesellschafts-Antheil bekannt, während k und d Grössen sind, von denen die eine immer willkührlich bleibt. Wird k innerhalb der möglichen Gränzen gross gewählt, so wird d klein ausfallen und umgekehrt. Man sieht daraus, dass unendlich viele Rentensysteme möglich sind.

Digitized by Google

Um aber den Einfluss von d zu beurtheilen, haben wir für den Werth des Ausdruckes

$$\left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)[1-t\varrho^{t-1}+(t-1)\varrho^t] = Dt$$

von $t=1$ bis $t=50$ und bei 4% Zinsen, also $\varrho = 0{,}9615385$ berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt

t	Dt	t	Dt	t	Dt
1	—	18	94,3476	35	244,8768
2	0,9245	19	102,8933	36	253,4053
3	2,7025	20	111,5646	37	261,8369
4	5,2669	21	120,3413	38	270,1754
5	8,5546	22	129,2024	39	278,4070
6	12,5062	23	138,1283	40	286,5303
7	17,0657	24	147,1012	41	294,5414
8	22,1805	25	156,1040	42	302,4369
9	27,8012	26	165,1212	43	310,2140
10	33,8813	27	174,1384	44	317,8700
11	40,3750	28	183,1423	45	325,4037
12	47,2456	29	192,1205	46	332,8113
13	54,4525	30	201,0618	47	340,0923
14	61,9596	31	209,9556	48	347,2455
15	69,7334	32	218,7924	49	354,2699
16	77,7420	33	227,5573	50	361,1648
17	85,9560	34	236,2606		

Der Factor von d, nämlich Dt, nimmt schon für gewöhnliche Werthe von t verhältnissmässig sehr hohe Werthe an, woraus sich schliessen lässt, dass der Zuwachs d eine verhältnissmässig sehr kleine Grösse sein wird.

Von allen Werthen für k und d scheint uns derjenige der zweckmässigste zu sein, welcher der Bedingung entspricht, dass in Gleichung (**1**) die zwei Theile rechter Hand einander gleich werden, dass wir also setzen

$$k\varrho\frac{1-\varrho^t}{1-\varrho} = dDt. \qquad (\mathbf{2})$$

Digitized by Google

Unter dieser Annahme verwandelt sich Gleichung (1) in folgende

$$(3) \qquad s_m = 2k\varrho\,\frac{1-\varrho^t}{1-\varrho}\,.$$

Es ist aber zu bemerken, dass darin t nicht mehr die wahrscheinliche Lebensdauer, sondern eine Mittelgrösse bedeutet, welche wir sogleich bestimmen werden. Weil nämlich k eine im Augenblick der Rechnung unveränderliche jährliche Rente vorstellt, so ist in Gleichung (1) jeder Theil rechter Hand eine Leibrente von jährlich k und durch

$$k \times r_{m+y}\,^{1})$$

ausgedrückt, so dass wir anstatt Gleichung (3) haben

$$(4) \qquad s_m = 2k \times r_{m+y},$$

woraus sich ohne alle Mühe die Grösse k berechnen lässt. Will man nun t und d berechnen, so ergibt sich aus (3) und (4)

$$2k\varrho\,\frac{1-\varrho^t}{1-\varrho} = 2k \times r_{m+y} \text{ oder}$$

$$(5) \qquad t = \frac{log\left[1 - \frac{1-\varrho}{\varrho} r_{m+y}\right]}{log\,\varrho}\,;$$

ist nun t bestimmt, so folgt auch d aus Gleichung (2),

$$(6) \qquad d = \frac{k}{Dt}\,\varrho\,\frac{1-\varrho^t}{1-\varrho} = \frac{s_m}{2Dt}\,.$$

Diese letzteren beiden Gleichungen sind aber nur dann nöthig, wenn man die steigende Jahresrente unabänderlich festsetzen, also daraus eine Leibrente machen will, wie dieses bei der Stuttgarter Renten-Gesellschaft der Fall ist. Nach unsrer Voraussetzung muss aber die Rente k jährlich bestimmt werden. Dieses geschieht, wie wir gezeigt haben, dadurch, dass wir aus dem Gesellschafts-Capital den Antheil des Einzelnen bestimmen und daraus die Jahresrente k.

---

[1]) m bedeutet das Alter beim Eintritt und $m+y$ das zur Zeit der Rechnung.

Digitized by Google

Zu diesem Zwecke haben wir schliesslich folgende 2 Gleichungen aufgestellt

$$\text{I.} \quad s_m = \frac{K}{p_m S\left[\frac{1}{p_x}\right]},$$

$$\text{II.} \quad k = \frac{s_m}{2r_{m+y}}.$$

Beispiel. Ein gegenwärtig 40jähriger Mann trat vor 10 Jahren einer Renten-Gesellschaft mit 3 Einlagen à 100 fl. bei. Welche Rente wird er dieses Jahr beziehen, und welche hat er im 80sten Lebensjahre zu erwarten, wenn sein gegenwärtiger Antheil am Gesellschafts-Capital 394 fl. beträgt?

Nehmen wir die Leibrenten-Tafel von Brune und 4% Zinsen, so ist der Aufgabe zufolge

$$m = 30;\ m + y = 40;\ r_{40} = 14{,}4068$$
$$s_{30} = 394;\ \text{somit nach Gleichung II.}$$
$$k = \frac{394}{2 \,.\, 14{,}4068} = 13{,}67 \text{ fl.}$$

Er wird also 13 fl. 40 kr. erhalten.

Um die Rente zu berechnen, welche er 40 Jahre später zu erwarten hat, haben wir den jährlichen Zuwachs d aus Gleichung (**6**) und zuvor t aus Gleichung (**5**) zu bestimmen. Wegen

$$\varrho = 0{,}9615385$$

wird aus (**5**)

$$t = \frac{log\,(1 - 0{,}04 \times 14{,}4068)}{log\ 0{,}9615385} = \frac{log\ 0{,}423728}{9{,}9829667 - 10}$$

$$t = \frac{9{,}6270872 - 10}{9{,}9829667 - 10} = \frac{0{,}3729128}{0{,}0170333} = 21{,}89.$$

Nehmen wir, um die Tabellen benützen zu können, $t = 22$, so ist mit Rücksicht auf Gleichung (**5**)

$$D_{22} = 129{,}2024 \text{ und}$$

$$d = \frac{s_m}{2Dt} = \frac{394}{258{,}4048} = 1{,}53.$$

Digitized by Google

Die fragliche Rente wird demnach betragen

$$k + 40d = 13{,}67 + 61{,}20 = 74{,}87 \text{ fl.}$$

Dieser Werth ist selbstverständlich nur ein wahrscheinlicher und wird in Wirklichkeit grösser oder kleiner ausfallen. Nach dem Tarife der Stuttgarter Renten-Gesellschaft wird diese Höhe nicht ganz erreicht.

Die hier vorgeschlagene Renten-Vertheilung lässt sich nicht bloss durch Anlegung der nöthigen Tabellen leicht und bequem ausführen, sondern hat auch noch das für sich, dass dadurch alle Mitglieder von einem Gesichtspuncte aus betrachtet werden, welcher den strengsten Anforderungen der Mathematik genügt.

Druck von Ph. J. Pfeiffer in Augsburg.

Digitized by Google